Algèbre – Maths 103

22 mai 2007

Avertissement

Ces notes ont été prises en cours d'algèbre par des étudiants, et parfois adaptées par ces derniers. Ce cours n'est ni exact ni complet. Utilisez le donc avec prudence.

Table des matières

Chapitre 1

Rappels

1.1 L'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}$

Remarque 1. L'équation
$$x^2 + 1 = 0$$
n'a pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. On cherche à construire un ensemble qui contienne $\mathbb{R}$, dans lequel cette équation possède des solutions.

1.1.1 Définition

Axiome 1. *Soit $\imath$ un nombre tel que*
$$\imath^2 = -1.$$

Définition 1. L'ensemble $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres z qui s'écrivent sous la forme $a + \imath b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\mathbb{C} = \{a + \imath b | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Définition 2. Cette écriture sous la forme $a + \imath b$ s'appelle l'écriture cartésienne.

Définition 3. On définit une loi d'addition "+" des complexes, compatible avec celle de $\mathbb{R}$:
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \left\{ \begin{array}{ccccc} z_1 & = & a & + & \imath b \\ z_2 & = & a' & + & \imath b' \end{array} \right. , z_1 + z_2 = (a + a') + \imath(b + b').$$

Définition 4. On définit une loi de multiplication "×" des complexes, compatible avec celle de $\mathbb{R}$:
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \left\{ \begin{array}{ccccc} z_1 & = & a & + & \imath b \\ z_2 & = & a' & + & \imath b' \end{array} \right. , z_1 \times z_2 = (a \times a' - b \times b') + \imath(a \times b' + a' \times b).$$

Définition 5. On définit une égalité, compatible avec celle de $\mathbb{R}$:
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \left\{ \begin{array}{ccccc} z_1 & = & a & + & \imath b \\ z_2 & = & a' & + & \imath b' \end{array} \right. , z = z' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & a' \\ b & = & b' \end{array} \right.$$
.

Théorème 1.

$$z = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. .$$

Définition 6. La partie réelle d'un complexe $z = a + \imath b$, $\Re(z)$, est le réel a.

Définition 7. La partie imaginaire d'un complexe $z = a + \imath b$, $\Im(z)$, est le réel b.

1.1.2 Structure du corps $\mathbb{C}$

Théorème 2. $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

Démonstration. $(\mathbb{C}, +)$ **est un groupe commutatif**

– "+" est une loi interne :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' \in \mathbb{C}.$$

– "+" est associative :

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

– $(\mathbb{C}, +)$ a un neutre :

$$\exists z_0 \in \mathbb{C} \mid \forall z \in \mathbb{C}, z + z_0 = z.$$

– "+" est symétrisable :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = 0.$$

– "+" est commutative :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z.$$

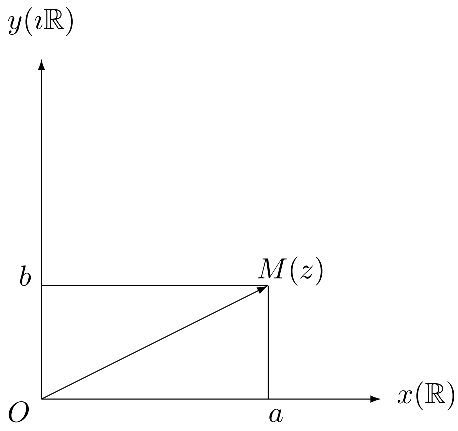
$(\mathbb{C}^*, \times)$ **est un groupe commutatif**
Idem.
"×" est distributive sur "+"

$$\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''.$$

□

1.1.3 Représentation graphique

Définition 8. On appelle "plan complexe d'Argan-Cauchy" le plan repéré par les complexes en effectuant la bijection abscisse du point – partie réelle, et ordonnée du point – partie imaginaire.



Théorème 3.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{R}, k \times z = k \times a + k \times \imath \times b.$$

Théorème 4. *$\forall t \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & t + z \end{cases}$$

est la translation de vecteur $\begin{pmatrix} \Re(t) \\ \Im(t) \end{pmatrix}$.

Théorème 5. *$\forall k \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & k \times z \end{cases}$$

est l'homothétie de centre O, et de rapport k.

Théorème 6.

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -z \end{cases}$$

est la symétrie par rapport à O.

1.1.4 Ecriture trigonométrique

1.1.4.1 Module

Définition 9. Le module $|z|$ d'un complexe z est le réeel $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Théorème 7.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \in \mathbb{R}_+^*.$$

Théorème 8.

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0. \end{aligned}$$

□

Théorème 9 (Inégalité triangulaire)**.**

$$\forall z \in C, z \geq \max(a, b).$$

Démonstration. On a

$$a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq |b|$$

et

$$b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq a^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|,$$

donc

$$z \geq \max(a, b).$$

□

Théorème 10. $|z|$ *est la distance* $OM(z)$.

Théorème 11.

$$\forall R \in \mathbb{R}_+, \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\} = \mathcal{C}_{O,R}.$$

1.1.4.2 Argument

Définition 10. L'argument $\arg z$ d'un complexe z est la mesure en radians de l'angle orienté de l'axe (Ox) avec $OM(z)$.

Remarque 2. L'argument n'est pas unique, mais congru modulo 2π.

Théorème 12.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg z = \theta \mid \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}.$$

Remarque 3. 0 n'a pas d'argument.

Exemple 1. Si $z = \sqrt{3} - \imath$, alors

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \\ &= 2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \arg z &= \theta \mid \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{2} \end{cases} \\ &= -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Définition 11. $\forall z \in \mathbb{C}$, si

$$\rho = |z|$$

et

$$\theta = \arg z,$$

alors

$$\rho(\cos\theta + \imath \sin\theta)$$

est l'écriture trigonométrique de z.

1.1.5 Complexe conjugué

Définition 12. Le conjugué $\overline{z}$ d'un complexe z est le complexe $a - \imath b$.

Théorème 13.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| = |\overline{z}|.$$

Théorème 14.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \arg \overline{z} = -\arg z.$$

Théorème 15.

$$\forall z \in \mathbb{C}, z \times \overline{z} = |z|^2.$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} z \times \overline{z} & = & (a + \imath b) \times (a - \imath b) \\ & = & a^2 + b^2 \\ & = & |z|^2. \end{array}$$

□

Théorème 16.

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}.$$

Théorème 17.

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

Théorème 18.

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{z} & = & \dfrac{1}{a + \imath b} \\ & = & \dfrac{a - \imath b}{(a + \imath b) \times (a - \imath b)} \\ & = & \dfrac{a + \imath b}{a^2 + b^2} \\ & = & \dfrac{\overline{z}}{|z|} \end{array}$$

□

1.1.6 Fonction exponentielle de la variable complexe

Théorème 19.
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|.$$

Théorème 20.
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \arg(z_1 \times z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Démonstration. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & \rho_1(\cos\theta_1 + \imath\sin\theta_1) \\ z_2 & = & \rho_2(\cos\theta_2 + \imath\sin\theta_2) \end{array},$$

donc

$$\begin{array}{rcl} z_1 \times z_2 & = & \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ & & +\rho_1\rho_2\imath(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ & = & \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \imath\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{array},$$

donc

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|,$$

et

$$\arg(z_1 \times z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

□

Théorème 21.
$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg\frac{1}{z} = -\arg z.$$

Démonstration. $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{z} & = & \frac{\overline{z}}{|z|} \\ & = & \frac{1}{\rho}(\cos\theta - \imath\sin\theta) \\ & = & \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + \imath\sin(-\theta)), \end{array}$$

donc

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|},$$

et

$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z.$$

□

Définition 13.
$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ a + \imath b & \mapsto & \exp(a) \times (\cos b + \imath\sin b) \end{array} \right. .$$

Théorème 22.

$$\forall b \in \mathbb{R}, \exp(\imath b) = \cos b + \imath \sin b.$$

Théorème 23.

$$\forall b \in \mathbb{R}, |\exp(\imath b)| = 1.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} |\exp(\imath b)| &= |\cos b + \imath \sin b| \\ &= \sqrt{\cos^2 b + \sin^2 b} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Théorème 24.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \arg(\exp(a + \imath b)) = b.$$

Théorème 25.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C},\ z &= |z| \exp(\imath \arg z) \\ &= \rho \exp(\imath \theta). \end{aligned}$$

Théorème 26.

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \times \exp(z_2) &= \exp(x_1) \exp(x_2)(\cos y_1 + \imath \sin y_1)(\cos y_2 + \imath \sin y_2) \\ &= \exp(x_1 + x_2)(\cos(y_1 + y_2) + \imath \sin(y_1 + y_2)) \\ &= \exp(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

□

Théorème 27.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \exp(-z) &= \exp(-(x + \imath y)) \\ &= \exp(-x - \imath y) \\ &= \exp(-x)(\cos(-y) + \imath \sin(-y)) \\ &= \frac{1}{x}(\cos y - \imath \sin y) \\ &= \frac{\exp(x)(\cos y - \imath \sin y)}{|\exp(z)|^2} \\ &= \frac{\overline{\exp(z)}}{|\exp(z)|} \\ &= \frac{1}{\exp(z)}. \end{aligned}$$

□

Théorème 28.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z + 2\imath\pi) = \exp(z).$$

Théorème 29 (Formules d'Euler)**.**

$$\forall y \in \mathbb{C}, \left\{ \begin{array}{lcl} \cos y & = & \dfrac{\exp(\imath y) + \exp(-\imath y)}{2} \\ \sin y & = & \dfrac{\exp(\imath y) - \exp(-\imath y)}{2\imath} \end{array} \right. .$$

Théorème 30.

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|.$$

Théorème 31.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n.$$

Théorème 32.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \left| \dfrac{z_1}{z_2} \right| & = & \left| \dfrac{\rho_1 \exp(\imath\theta_1)}{\rho_2 \exp(\imath\theta_2)} \right| \\ & = & \left| \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \exp(\imath\theta_1) \exp(-\imath\theta_2) \right| \\ & = & \left| \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \exp(\imath(\theta_1 - \theta_2)) \right| \\ & = & \left| \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \right| \\ & = & \dfrac{\rho_1}{\rho_2}. \end{array}$$

□

Théorème 33.

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \theta_1 - \theta_2.$$

Théorème 34.

$$\overline{z} = \rho \exp(-\imath\theta).$$

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} \overline{z} & = & \rho(\cos\theta - \imath \sin\theta) \\ & = & \rho(\cos(-\theta) + \imath \sin(-\theta)) \\ & = & \rho \exp(-\imath\theta). \end{array}$$

□

Théorème 35.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{z}} &= \frac{1}{\rho\exp(-\imath\theta)}\\ &= \frac{1}{\rho}\exp(\imath\theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{\rho\exp(\imath\theta)}\\ &= \frac{1}{\rho}\exp(-\imath\theta),\end{aligned}$$

donc

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

□

1.1.6.1 Point de vue géométrique

Théorème 36. $\forall (z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & z\times z'\end{array}\right. = \mathcal{H}_{0,\rho'} \circ \mathcal{R}_{0,\theta'}(z)$$

1.1.7 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 14. $\forall z \in \mathbb{C}$, on appelle racines carrées de z les nombres complexes x tels que

$$x^2 = z.$$

Remarque 4. Noter $\sqrt{z}$ est ambigu, et donc déconseillé.

Remarque 5. Si z est une racine deuxième, alors $-z$ aussi.

$$\forall Z \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C}, z^2 = Z \Rightarrow (-z')^2 = Z.$$

Remarque 6. Soit $z \in \mathbb{C}, z = a + \imath b$. On cherche $z' \in \mathbb{C} \mid z'^2 = z$. On a $|z'^2| = |z'|^2 = |z|$, donc $|z'| = \sqrt{|z|}$.

$$\left\{\begin{array}{c} a'^2 - b'^2 + 2\imath a'b' = a + \imath b\\ a'^2 + b'^2 = \sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a'^2 - b'^2 = a\\ a'^2 + b'^2 = \sqrt{a^2+b^2}\\ 2a'b' = b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a' = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\\ b' = \frac{b}{2a'}\end{array}\right. .$$

Exemple 2. $z = 4$ a deux racines deuxièmes dans $\mathbb{C}$: 2 et -2. Dans $\mathbb{R}$, la seule racine deuxième de 4 est $\sqrt{4}$: 2.

Exemple 3. $z = 3 + 4\imath$. On cherche $x = a' + \imath b'$ tel que $x^2 = z$. On a

$$\left\{ \begin{array}{c} a'^2 - b'^2 = 3 \\ a'^2 + b'^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ 2a'b' = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a'^2 = 8 \\ 2a'b' = 4 \end{array} \right. :$$

Les deux solutions sont $2 - \imath$, et $-2 - \imath$.

1.1.8 Equations du deuxième ordre

Remarque 7. Si

$$\begin{array}{lcl} \forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2, & & \\ P(z) & = & a \times z^2 + b \times z + c \\ & = & a\left(z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a}\right) \\ & = & a\left((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ & = & a\left((z + \frac{b}{2a})^2 \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right), \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{rcl} P(z) = 0 & \Leftrightarrow & (z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ & \Leftrightarrow & z = \pm S - \frac{b}{2a}, \end{array}$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} b^2 - 4ac \geq 0 & \Rightarrow & S = \sqrt{b^2 - 4ac} \\ b^2 - 4ac < 0 & \Rightarrow & S = \imath \sqrt{|b^2 - 4ac|} \end{array} \right. .$$

1.1.9 Les racines de l'unité

Théorème 37. *$\forall n \in \mathbb{N}$, l'ensemble U_n des racines de l'unité est*

$$U_n = \{u \in \mathbb{C} \mid u^n = 1\}.$$

Théorème 38. *$(U_n, \times)$ est un groupe (multiplicatif) commutatif.*

Démonstration. □

Théorème 39.

$$U_n = \left\{ \exp(\frac{2\imath k \pi}{n}) \mid k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Démonstration. – "×" est une loi interne :

$$\forall (u, u') \in U_n^2, u \times u' \in U_n.$$

– "×" est associative :

$$\forall (u, u', u'') \in U_n^3, (u + u') + u'' = u \times (u' \times u'').$$

– $(U_n, \times)$ a un neutre :

$$\exists u_0 \in U_n \mid \forall u \in U_n, u \times u_0 = u.$$

– "×" est symétrisable :

$$\forall u \in U_n, \exists u' \in U_n \mid u \times u' = 1.$$

– "×" est commutative :

$$\forall (u, u') \in U_n, u + u' = u' \times u.$$

□

Théorème 40. *Si*

$$u_k = \exp(\frac{2\imath k\pi}{n}),$$

alors

$$u_0 + \ldots + u_{n-1} = 0.$$

Remarque 8. Géométriquement : 0 est l'isobarycentre des racines de l'unité.

1.2 Applications

Remarque 9. f, g, … désignent des fonctions, E, F, … des ensembles, et x, y, … des éléments de ces ensembles.

1.2.1 Définition

Définition 15. Si f est une relation de E vers F, on dit que f est une application de $E \to F$ si, à tout élément $x \in E$, f fait correspondre un unique élément $y \in F$.

Définition 16. $f(x)$ s'appelle l'image de x par f.

Définition 17. Si $y \in F$, et $x \in E$ tel que$f(x) = y$, on appelle x un "antécédent" de y.

Théorème 41. *$f(x)$ a pour antécédent x.*

Théorème 42. *Si $f : E \to F$, E s'appelle l'"ensemble de départ" de f, et F l'"ensemble d'arrivée".*

Théorème 43. *$f = g$ si et seulement si f et g ont le même ensemble de départ, et,*

$$\forall x \in E, f(x) = g(x).$$

Exemple 4. TODO : petits dessins

1.2.2 Image directe — Image réciproque

Définition 18. Si $A \subset E$, l'image directe de A est $f(A)$,

$$\begin{array}{rcl} f(a) & = & \{f(x) \mid x \in A\} \\ & = & \{y \in F \mid \exists x \in A \mid y = f(x)\}. \end{array}$$

Définition 19. Si $B \subset F$, l'image réciproque de B est $f^{-1}(B)$,

$$f^{-1}(B) = x \in E \mid f(x) \in B.$$

Théorème 44.

$$f^{-1}(B) \subset E.$$

Remarque 10. On n'a pas toujours ←!

$$f^{-1}(B) = E.$$

Exemple 5. Si

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2 \times n \end{array} \right. ,$$

f est une applications, car elle fait correpondre, à chaque entier, une image unique. Cependant,

$$f(\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}.$$

Exemple 6. Si

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & r \mid n = 3 \times q + r, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{1, \dots, 3 - 1\} \end{array} \right. ,$$

est une application, et

$$f(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2\}.$$

Définition 20. Si A et B sont deux ensembles,

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B.$$

Définition 21. Si A et B sont deux ensembles,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Exemple 7.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

est une fonction, mais n'est pas une application.

1.2.3 Propriétés

$f : E \to F$ est une application, A_1 et A_2 des sous-ensembles de E, et B_1 et B_2 des sous-ensembles de F.

Théorème 45.
$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2).$$

Démonstration. Si $y \in f(A_1)$, alors $\exists x \in A_1 \mid y = f(x)$, or $A_1 \subset A_2$, donc $x \in A_2$, donc $f(x) \in f(A_2)$, donc $f(A_1) \subset f(A_2)$. □

Théorème 46.
$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2).$$

Démonstration. TODO □

Théorème 47.
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Démonstration. TODO □

Théorème 48.
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B2).$$

Démonstration. TODO □

Théorème 49.
$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Démonstration. TODO □

Théorème 50.
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Démonstration. TODO □

1.2.4 Composition

Définition 22. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, on appelle composée de f par g l'application
$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g(f(x)) \end{array} \right. .$$

Remarque 11. Si $f : E \to F$ et $g : G \to H$, $g \circ f$ est bien définie si et seulement si $F \subset G$.

!→ *Remarque* 12. On n'a pas toujours
$$f \circ g = g \circ f.$$

1.2.5 Applications injectives, surjectives et bijectives

Définition 23. Si $f : E \to F$ est une application, on dit qu'elle est injective si deux antécédents différents on des images différentes :

$$\forall (x, y) \in E^2 | x \neq y, f(x) \neq f(y).$$

Théorème 51. *Si f est injective,*

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Exemple 8. TODO : petit dessin

Définition 24. Si $f : E \to F$ est une application, on dit qu'elle est surjective si tout élément de F a un antécédent :

$$\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x).$$

Théorème 52. *f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*

Exemple 9. TODO : petit dessin

Exemple 10.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2 \times n \end{array} \right.$$

est injective, mais n'est pas surjective.

Exemple 11.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & r | n = 3 \times q + r, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{1, \ldots, q - 1\} \end{array} \right.$$

n'est ni injective, ni surjective.

Exemple 12.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n, m) & \mapsto & n + m + 1 \end{array} \right.$$

n'est ni injective, ni surjective.
Par contre,

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (n, m) & \mapsto & n + m + 1 \end{array} \right.$$

n'est pas injective (0), mais est surjective ($n = (n - 1 + 0 + 1)$.

Exemple 13.

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{array} \right.$$

n'est ni injective (θ à 2π près), ni surjective (0).
Par contre,

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & \exp(z) \end{array} \right.$$

est, elle, surjective.

Exemple 14.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^2 \end{array} \right.$$

n'est pas injective (il y a deux racines deuxièmes complexes si $z \neq 0$), mais est surjective (tout complexe a des racines deuxièmes).

Définition 25. Si f est une application surjective et injective, on dit qu'elle est bijective :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E \mid y = f(x).$$

Théorème 53. *La réciproque f^{-1} d'une bijection f est une bijection.*

Théorème 54. *La composée d'une bijection avec sa réciproque, et la composée de la réciproque d'une bijection avec la bijection sont l'identité :*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F, \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

Théorème 55. *Si f et g sont deux applications, alors*

$$f \circ g = \mathrm{Id} \text{ et } g \circ f = \mathrm{Id}$$

si et seulement si f est bijective, et $g = f^{-1}$.

Théorème 56. *Si f est injective,*

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y') \Rightarrow y = y'.$$

Démonstration.

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y') \Rightarrow f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y')) \Rightarrow y = y'.$$

□

Théorème 57. *Si f est surjective,*

$$f^{-1} \circ f(x) = \{x\}.$$

Démonstration.

$$f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow x = x'.$$

□

Exemple 15. Si

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n-1 \end{array} \right. \text{ et } g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$$

on a

$$g \circ f = \mathrm{Id},$$

!→ mais

$$f \circ g \neq \mathrm{Id}.$$

Exemple 16.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, 2 \times x - y) \end{array} \right.$$

est bijective.

Exemple 17.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N}^* \\ (n, m) & \mapsto & 2^n \times (2 \times m + 1) \end{array} \right.$$

est bijective.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

En géométrie, on a introduit la notion de vecteur.
On étudie les ensembles qui possèdent des lois analogues.

Par abus de notation, on dira que E de $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

2.1 Définition

Définition 1. Un magma est un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Définition 2. Une loi associative sur un ensemble E est une loi $\star$ qui vérifie

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

Définition 3. Un magma associatif est un magma dont la loi de composition interne est associative.

Définition 4. Un neutre e à gauche d'une loi $\star$ sur un ensemble E est un élément de E qui vérifie

$$\forall x \in E, e \star x = x.$$

Définition 5. Un neutre e à droite d'une loi $\star$ sur un ensemble E est un élement de E qui vérifie

$$\forall x \in E, x \star e = x.$$

Définition 6. Un neutre est un neutre à gauche et à droite.

Définition 7. Un monoïde est un magma associatif muni d'un neutre.

Définition 8. Le symétrique à gauche x^{-1} par rapport à une loi $\star$ d'un élément x d'un ensemble E est un élement de E qui vérifie

$$x^{-1} \star x = x.$$

Définition 9. Le symétrique à droite x^{-1} par rapport à une loi $\star$ d'un élément x d'un ensemble E est un élement de E qui vérifie
$$x \star x^{-1} = x.$$

Définition 10. Un symétrique est un symétrique à droite et un symétrique à gauche.

Définition 11. Un groupe est un monoïde dont tous les éléments sont symétrisables.

Définition 12. Une loi commutative $\star$ sur un ensemble E est une loi qui vérifie

$$\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x.$$

Définition 13. Un groupe commutatif est un groupe dont la loi est commutative.

Définition 14. Un corps K est un ensemble muni de deux lois, "+" et "$\times$", vérifiant
- $(K, +)$ est un groupe commutatif, dont le neutre est noté "0".
- $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe (multiplicatif).
- La multiplication est distributive sur l'addition :

$$\forall (a, b, c) \in K^2, \left\{ \begin{array}{lcl} a \times (b + c) & = & a \times b + a \times c \\ (b + c) \times a & = & b \times a + c \times a \end{array} \right. .$$

Définition 15. Un espace vectoriel E sur un corps commutatif dit "des scalaires" $(K, +, \times)$ (un K-espace vectoriel) est un groupe commutatif, muni d'une loi "$\cdot$" de composition externe

$$K \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda.x,$$

qui vérifie
- L'élément unité "1" du corps K (neutre de $\times$ de K) est neutre à gauche pour la loi "$\cdot$" :

$$\forall u \in E, 1 \cdot u = u.$$

- La loi "$\cdot$" est distributive (à gauche) par rapport à l'addition "+" de $(E, +, \cdot)$:

$$\forall \lambda \in K, \forall (u, v) \in E^2, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

- La loi "$\cdot$" est exodistributive (à droite) par rapport à l'addition "+" du corps $(K, +, \times)$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u.$$

- La loi "$\cdot$" est exoassociative par rapport à la multiplication "$\times$" du corps $(K, +, \times)$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall u \in E, (\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u).$$

Définition 16. L'élément neutre de la loi de composition interne "+" est "0", le "vecteur nul".

Théorème 1.
$$\forall u \in E, 0 \cdot u = 0.$$

Théorème 2.
$$\forall \lambda \in K, \lambda \cdot 0 = 0.$$

Théorème 3.
$$\forall u \in E, (0 + 0) \cdot u = 0.$$

2.2 Exemples

2.2.1 Exemple fondamental de $\mathbb{R}^2$

Exemple 1.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$
$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \exists!(x_1, x_2) \mid u = (x_1, x_2).$$
$$\forall((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2.$$

On définit

$$+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array} \right.$$

et

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \end{array} \right. .$$

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
Oui : TODO

2.2.2 Exemple fondamental de $\mathbb{R}^3$

TODO

2.2.3 Exemples de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$

Théorème 4. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ sont des $\mathbb{Q}$et $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

2.2.4 Exemple fondamental des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

TODO

2.2.5 Exemple fondamental des suites réeelles

Exemple 2. Si

$$S = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}\},$$

alors

$$\forall((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in S^2, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

et

$$\forall(\lambda, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in K \times S, \lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} :$$

$(S, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.2.6 Remarques importantes sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Remarque 1.

$$\begin{array}{rcl} \forall u \in \mathbb{R}^2, \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u & = & (x_1, x_2) \\ & = & (x_1, 0) + (0, x_2), \end{array}$$

or

$$\begin{array}{rcl} (x_1, 0) & = & (x_1 \times 1, x_1 \times 0)) \\ & = & x_1 \cdot (1, 0) \\ (0, x_2) & = & (x_2 \times 0, x_2 \times 1)) \\ & = & x_2 \cdot (0, 1) \end{array},$$

donc

$$u = x_1 \cdot (1, 0) + x_2 \cdot (0, 1) :$$

u est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$: $\mathbb{R}^2$ appartient à l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Remarque 2.

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \exists (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid v = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) :$$

on dit que v est une combinaison linéaire de $(x_1, 0, 0)$, $(0, x_2, 0)$ et $(0, 0, x_3)$.

2.3 Combinaisons linéaires

Définition 17. Si $(E, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel, si $n \in \mathbb{N}^*$, si $(v_1, \ldots, v_n) \in E^n$, et $u \in E$, u est une combinaison linéaire des n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ si et seulement si

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in K^n \mid u = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n.$$

Chapitre 3

Sous-espaces vectoriels

3.1 Définition

Définition 1. Si $(E, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel, et si $F \subset E$, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si$(F, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel.

Théorème 1. *Si $(E, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel, et si $F \subset E$, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

$$\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$$

et

$$\forall (\lambda, u) \in K \times F, \lambda \cdot u \in F.$$

Démonstration. **Sens "$\Rightarrow$"**
Si F est un K-espace vectoriel, alors "+" et "$\cdot$" sont stables.

Sens "$\Leftarrow$" TODO □

3.2 Exemples

Exemple 1. TODO

Exemple 2. TODO

Théorème 2. *TODO*

Démonstration. TODO □

Exemple 3 ($\mathbb{Q}$)**.** TODO

Démonstration. TODO □

Exemple 4. TODO

Démonstration. TODO □

Exemple 5. TODO

Démonstration. TODO □

Exemple 6. TODO

Démonstration. TODO □

Exemple 7. TODO

Démonstration. TODO □

Exemple 8. TODO

Démonstration. TODO □

Définition 2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$F + G = \{x \in E \mid \exists (y, z) \in F \times G \mid x = y + z\}.$$

Théorème 3. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. TODO □

Théorème 4. *$\emptyset$ n'est pas un espace vectoriel.*

Théorème 5.

Définition 3. Si A et B sont deux ensembles, A est plus petit que B si $A \in B$.

Théorème 6. *$\{0\}$ est le plus petit espace vectoriel.*

Théorème 7. *Un espace vectoriel ne peut pas avoir exactement deux éléments.*

Théorème 8. *Si L, M et N sont des sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N.$$

TOTO : vrai ?

Théorème 9. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.*

Théorème 10. *$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne $F \cup G$.*

Théorème 11 (Corollaire)**.**

$$F + G = F \cup G \Leftrightarrow F \subset G \ \mathit{ou}\ G \subset F.$$

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}^2$, si $A = \{(1,1)\}$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc $\forall \lambda \in R, \lambda \cdot (1,1) \in \mathrm{Vect}(A)$, donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1,1)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(A)$, or cet ensemble est un sous-espace vectoriel de E qui contient A, et donc $\mathrm{Vect}(A)$, donc $A = \mathrm{Vect}(A)$.

Exemple 10. Dans $\mathbb{R}^3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \Rightarrow A = \mathrm{Vect}(A)$.

Exemple 11. Dans $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, $\mathrm{Vect}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$.

3.3 Vect(A)

Définition 4. Si A est un ensemble fini de vecteurs de E, $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A.

Démonstration. Si

$$A = \{x_1, \ldots, x_n\},$$

on a $\mathrm{Vect}(A)$ qui est inclus dans l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1, \ldots, x_n$, donc si y est une de ces combinaisons linéaires,

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n \mid y = \lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n.$$

Comme $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel, $y \in \mathrm{Vect}(A)$, donc l'ensemble de ces combinaisons linéaires est inclus dans $\mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des ces combinaisons linéaires. $\square$

Définition 5. On dit que A "engendre" $\mathrm{Vect}(A)$.

Chapitre 4

Applications linéaires

Hypothèses $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ sont des K-espace vectoriel, x, x_1, x_2, ... sont des éléments de E, et λ, λ_1, λ_2 des scalaires (éléments de K).

Définition 1. Si $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ sont deux K-espace vectoriel, une application de E dans F est une application linéaire si elle vérifie

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

et

$$\forall (\lambda, x) \in K \times E, f(\lambda.x) = \lambda.f(x).$$

Théorème 1. *Si $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ sont deux K-espace vectoriel, et si f est une application de E dans F, elle vérifie*

$$\forall (\lambda, x_1, x_2) \in K \times E^2, f(x_1 + \lambda.x_2) = f(x_1) + \lambda.f(x_2)$$

si et seulement si c'est une application linéaire.

Définition 2. Une application $f : E \to E$ est un endomorphisme.

Exemple 1.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y, 2x + y) \end{array} \right.$$

est une application linéaire.

Exemple 2. TODO

Exemple 3. TODO

Exemple 4. TODO

Exemple 5. TODO

Définition 3. L'“image”, $\mathrm{Im} f$, de f est l'ensemble des images

$$\mathrm{Im} f = f(E).$$

Théorème 2. $\mathrm{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

Démonstration. TODO □

Définition 4. Le "noyau", $\ker f$, de f est l'ensemble des antécédents de 0

$$\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

Théorème 3. $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Démonstration. TODO □

Théorème 4. f *est injective si et seulement si* $\ker f = \{0\}$.

Démonstration. TODO □

Théorème 5. f *est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im} E = F$.

Démonstration. TODO □

Exemple 6. TODO

Exemple 7. TODO

Exemple 8. TODO

Théorème 6. f *est un isomorphisme si et seulement si* f *est bijective linéaire.*

Définition 5. Un endomorphisme qui est un isomorphisme est un "automorphisme".

Exemple 9. TODO $\mathbb{R}^2$

Démonstration. □

Exemple 10. TODO notation

Exemple 11. TODO R^3

Théorème 7. *Toute application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}^m$*, avec* $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, est de la forme*

$$\begin{array}{rccccccc} f((x_1, \dots, x_n)) = & (& a_{1,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1,n} \cdot x_n, & \\ & & & & \dots & & & \\ & & a_{m,1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{m,n} \cdot x_n &), \end{array}$$

avec $\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Définition 6. $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Définition 7. On définit une loi "+" de composition interne

$$\mathcal{L}(E, F)^2 \to \mathcal{L}(E, F) : (f, g) \mapsto f + g.$$

Définition 8. On définit une loi "$\cdot$" de composition externe

$$K \times \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(E,F) : (\lambda, f) \mapsto (\lambda \cdot f).$$

Théorème 8. $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ *est un* K*espace vectoriel.*

Définition 9 (Loi de composition)**.** Si $(E,+,\cdot)$, $(F,+,\cdot)$ et $(G,+,\cdot)$ sont des K-espace vectoriel, et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ sont des applications linéaires, alors la composée de f par g est

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Théorème 9. *La loi de composition est interne :* $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

Démonstration. TODO □

Théorème 10. $\forall f \in \mathcal{L}(E,F)$, *si* f *est bijective, alors* f^{-1} *existe, et* $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Démonstration. TODO □

Exemple 12. TODO

Chapitre 5

Familles génératrices, libres – Bases d'un espace vectoriel

$(E, +_E, \cdot)$ est un espace vectoriel sur un corps commutatif K.

5.1 Combinaisons linéaires

Définition 1. Une famille S de vecteurs de E est une suite, finie ou infinie, de vecteurs de E, notée

$$S = (e_i)_{i \in I},$$

avec, $\forall i \in I, e_i \in E$.

Définition 2. Si $S \in (e_i)_{i \in I}$ est une famille de E ; "on appelle combinaison linéaire" de S toute somme finie de la forme :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i,$$

avec $I \subset \mathbb{N}$, I fini, et, $\forall\ i \in I, \lambda_i \in K$.

Exemple 1. Soit S une famille de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec

$$S = (x \mapsto \exp(a \times x))_{a \in \mathbb{R}}.$$

Un exemple de combinaison linéaire de S est la fonction

$$s = 3f_\pi +_E 4^{1/3} f_{\sqrt{2}} +_E \sqrt{3} f_2.$$

On a s qui vérifie

$$s = x \mapsto 3e^{\pi x} + 4^{1/3} e^{x\sqrt{2}} + \sqrt{3} e^{2x}.$$

Exemple 2. $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $((i, 2a))_{a \in \mathbb{C}}$ est une famille de $\mathbb{C}^2$.

Théorème 1. *L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs S est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui contienne S :* $\mathrm{Vect}(S)$.

Démonstration. La preuve a été faite lorsque la famille est finie ; elle est analogue lorsque S est infinie : l'ensemble des combinaisons linéaires de S est dans E, car toute somme finie de vecteurs de E est un vecteur de E ; de même si on le multiplie par un scalaire.

Soient U et V des combinaisons linéaires de $S = (e_i)_{i\in I}$.
On a alors $\exists\ J_0 \subset I$ fini, tel que

$$U = \sum_{i\in J_0} \lambda_i \cdot e_i,$$

avec $\forall\ i \in J_0, \lambda_i \in K$,
et $\exists\ J_1 \subset I$ fini, tel que

$$V = \sum_{i\in J_1} \mu_i \cdot e_i,$$

avec $\forall\ i \in J_1, \mu_i \in K$.
On a alors

$$U +_E V = \sum_{i_0\in J_0} \lambda_{i_0} e_{i_0} +_E \sum_{i_1\in J_1} \mu_{i_1} e_{i_1},$$

qui est une somme finie, combinaison linéaire de

$$(e_i)_{i\in J_1\cup J_0}.$$

On a donc $U +_E V$ qui est une combinaison linéaire de S,
donc l'ensemble des combinaisons linéaires de S est stable par $+$ et $\cdot$ (par un scalaire),
donc c'est un sous-espace vectoriel de E ; c'est le plus petit (car S est finie),
donc $\mathrm{Vect}(S)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de S.

□

5.2 Familles génératrices

Définition 3. Soit S une famille de E. On dit que S est génératrice dans E si et seulement si

$$\mathrm{Vect}(S) = E.$$

Exemple 3. $E = \mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Si $u \in E$, alors $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$u = (x_1, x_2) = x_1 \cdot (1, 0) +_2 x_2 \cdot (0, 1),$$

donc u est une combinaison linéaire de S :

$$S = ((1, 0), (0, 1)),$$

donc $u \in \text{Vect}(S)$, donc $\mathbb{R}^2 \subset \text{Vect}(S)$;
or, d'après le Théorème 1,

$$\text{Vect}(S) \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Vect}(S) = \mathbb{R}^2,$$

donc S est génératrice dans $\mathbb{R}^2$. On dit aussi que S *engendre* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4. $E = \mathbb{C}^3$
Soit $u \in E$. On a donc $\exists\ y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}$ tels que

$$u = (y_1, y_2, y_3),$$

donc

$$u = y_1 \cdot (1, 0, 0) + y_2 \cdot (0, 1, 0) + y_3 \cdot (0, 0, 1).$$

Soit

$$S = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

On a

$$u \in \text{Vect}(S),$$

donc

$$\mathbb{C}^3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) :$$

S est génératrice.

Exemple 5. $E = \mathbb{C}^2$, $S = ((i, 0), (i, i), (0, i))$.
S est-elle génératrice ?
Oui. Démonstration :
Soit $u \in \mathbb{C}^2$, donc $\exists\ x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ tels que $u = (x_1, x_2)$. Il faut trouver $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que

$$(x_1, x_2) = \lambda_1(i, 0) + \lambda_2(i, i) + \lambda_3(0, i).$$

Soient $x_1 = \lambda_1 i + \lambda_2 i$, et $x_2 = \lambda_2 i + \lambda_3 i$.

On prend $\lambda_2 = 0$ ainsi :

$$\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 \cdot i \\ x_2 = \lambda_3 \cdot i \end{array},$$

donc

$$\begin{array}{lllll} \lambda_1 & = & \dfrac{x_1}{i} & = & -ix_1 \\ \lambda_3 & = & & & -ix_2 \end{array},$$

donc

$$(x_1, x_2) = -ix_1(i, 0) + 0(i, i) + (-ix_2)(0, i),$$

et donc

$$(x_1, x_2) \in \text{Vect}(S) :$$

la famille $((i, 0), (i, i), (0, i))$ est génératrice.

5.3 Familles libres

Définition 4. Si S est une famille de E, on dit que S est *libre* si et seulement si les seules combinaisons linéaires qui valent 0_E sont celles pour lesquelles tous les scalaires sont nuls :
si $S = (e_i)_{i\in I}$, $\forall\ J \subset I, J$ fini,
S est libre si et seulement si

$$\sum_{i\in J} \lambda_i e_i = 0_E \Rightarrow \forall\ i \in J, \lambda_i = 0.$$

Exemple 6 (Suite de l'Exemple 3)**.** $S = ((1,0),(0,1))$ est une famille de $\mathbb{R}^2$.
S est-elle une famille libre ?
Oui. Démonstration :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1.(1,0) + \lambda_2.(0,1) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

On a donc

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 :$$

S est bien libre.

Exemple 7 (Suite de l'Exemple 4)**.** $S = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une famille de $\mathbb{C}^3$.
S st-elle libre ?
Oui. Démonstration :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

On a donc

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0 :$$

S est bien libre.

Exemple 8 (Suite de l'Exemple 5)**.** $S = ((\imath, 0), (\imath, \imath), (0, \imath))$ est une famille de $\mathbb{C}^2$.
S est-elle libre ?
On a

$$1.(i,0) + (-1).(\imath,\imath) + 1.(0,\imath) = (0,0) :$$

il existe une combinaison linéaire avec des scalaires non nuls ($1, -1$ et 1), qui donne $(0,0)$: la famille n'est pas libre.

Définition 5. Une famille non libre est dite *liée.*

Remarque 1. Une famille S de E qui contient 0_E est liée, $1.0_E = 0_E$
1.0_E est une combinaison linéaire non nulle qui vaut 0_E

Théorème 2. *Soit S une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E ; S est liée si et seulement si il existe un vecteur de S qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de S.*

Démonstration. **Sens "$\Rightarrow$"**
Si S est liée, il existe une combinaison linéaire de S

$$\lambda_1 e_i + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E,$$

et les λ_i ne sont pas tous nuls ($\exists\ i \mid \lambda_i = 0$), soit $\lambda_{i_0} \neq 0$.
Ainsi,

$$\lambda_{i_0} e_{i_0} = -\lambda_1 e_i - \lambda_2 e_2 - \lambda_{i_0} e_{i_0} - \lambda_n e_n,$$

donc

$$e_{i_0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{i_0}} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_{i_0}} e_2 \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{i_0}} e_n :$$

a $n+1$ termes, donc e_{i_2} est une combinaison linéaire de $(e_2, e_2, \ldots, e_n)$ privée de e_{i_0}.

Sens "$\Leftarrow$"
Si il existe i_0 tel que e_{i_0} soit une combinaison linéaire de

$$(e_i)_{i \in J} e_{i_0} = \sum_{i \in J} \lambda_i e_i,$$

la famille $(e_{i_0}, e_i)_{i \in J}$ est liée, car

$$e_{i_0} - \sum_{i \in J} \lambda_i e_i = 0_E,$$

est une combinaison linéaire à coefficients non tous nuls qui vaut 0_E □

Théorème 3. *Si S est une famille finie de E :*

$$S = (e_1, e_2, \ldots, e_n),$$

et si e_1 est une combinaison linéaire de $e_2, \ldots, e_n$, alors

$$\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n).$$

Démonstration. $e_2, e_3, \ldots, e_n \in S \Rightarrow \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n) \subset \mathrm{Vect}(S)$
Soit $u \in \mathrm{Vect}(S)$. On a donc

$$\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K,$$

tel que

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n,$$

or

$$e_1 = \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \mid \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K,$$

donc

$$u = (\lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2) e_2 + (\lambda_1 \alpha_3 + \lambda_3) e_3 + \cdots + (\lambda_1 \alpha_n + \lambda_n) e_n,$$

donc

$$u \in \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n),$$

donc

$$\mathrm{Vect}(S) \subset \mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n),$$

d'où l'égalité. □

Exemple 9. $S = ((1,0,1),(-1,0,2),(0,0,6))$ est une famille de $\mathbb{R}^3$. On a

$$(0,0,6) = 2(1,0,1) + 2(-1,0,2),$$

donc

$$\Rightarrow \text{Vect}(S) = \text{Vect}((1,0,1),(-1,0,2)).$$

$(1,0,1)$ et $(-1,0,2)$ sont-ils libres ?
Oui. Démonstration :
On a

$$\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(-1,0,2) = (0,0,0),$$

donc

$$(\lambda_1 - \lambda_2, 0, \lambda_1 + 2\lambda_2) = (0,0,0),$$

donc

$$\lambda_2 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow ((1,0,1),(-1,0,2)),$$

est libre : donc ils forment une base.

5.4 Bases

Définition 6. Une famille libre et génératrice de E est une *base* de E.

Remarque 2. Par convention, la base de $\{0\}$ est l'ensemble vide, $\emptyset$.

Théorème 4. *Si S est une base de E, tout vecteur de E s'écrit alors de manière* unique *comme combinaison linéaire de vecteurs de S.*

Démonstration. Dans le cas où S est finie, $S = (e_1, \ldots, e_n)$.
Comme $V \in E$, $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$,

$$V = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Si $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tel que

$$V = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

alors

$$V - V = 0_E = (\lambda_1 - \alpha_1)e_1 + (\lambda_2 - \alpha_2)e_2 + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n)e_n,$$

or S est libre, donc

$$\begin{cases} \lambda_1 - \alpha_1 = 0 \\ \lambda_n - \alpha_n = 0 \end{cases},$$

donc

$$\begin{cases} \alpha_1 = \lambda_1 \\ \alpha_2 = \lambda_2 \\ \ldots \\ \alpha_n = \lambda_n \end{cases}.$$

$\square$

Chapitre 6

Cas particuliers : droites et plans vectoriels d'un K-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$

6.1 Droites

Définition 1. Une droite de E est un sous-espace vectoriel de E engendré par un vecteur non nul de E.

Remarque 1. Si $u \in E$ tel que$u \neq 0$, alors

$$\text{Vect}u = \lambda.u \mid \lambda \in K.$$

Exemple 1. $E = R^n$
D est une droite si et seulement si il existe $u \in R^n$,

$$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0),$$

tel que $D = \text{Vect}(u)$.
Si

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x \in D \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},$$

tel que

$$x = \lambda u = \begin{cases} x_1 & = & \lambda a_1 \\ x_2 & = & \lambda a_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n & = & \lambda a_n \end{cases}$$

ce sont les équations paramétriques de D.

De même dans $\mathbb{C}^n$.

Remarque 2. Soient $u, v \in E$. Si $u = v = 0_E$, alors $\mathrm{Vect}(u, v) = \{0\}$.
Supposons qu'ils soient tous les deux non nuls.
Si (u, v) est liée, alors $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in K$, tels que $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, et

$$\lambda_2 u + \lambda_2 v = 0 :$$

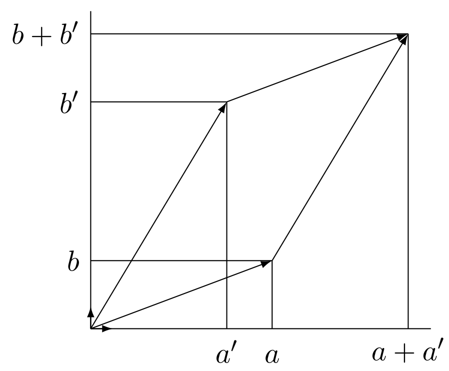
$$\lambda_1 u = -\lambda_2 v \Leftrightarrow u = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

car $\lambda_1 \neq 0$:
u et v sont *colinéaires*,
i.e. $\exists\ \lambda \in K, u = \lambda.v$.

Exemple 2. $E = \mathbb{R}^2$
Soient $U = (a, b) \neq (0, 0)$, et $V = (a', b') \neq (0, 0)$.
U et V sont colinéaires, donc
$\exists\ \lambda \neq 0$ tel que $U = \lambda V$, donc $(a, b) = \lambda.(a', b')$, donc

$$\begin{cases} a = \lambda a' \\ b = \lambda b' \end{cases}$$

Si $b' = 0$, alors $b = 0$, et $a = \lambda.a'$, donc $\lambda = \frac{a}{a'}$.
Si $b \neq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{b}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ soit $\boxed{ab' - a'b = 0}$



6.2 Plans

L'aire du paralélogramme est $ab' - a'b$.
(a, b) et (a', b') colinéaires si et seulement si l'aire du paralélogramme est nulle (les 2 vecteurs appartiennent à la même droite).

Exemple 3. $E = \mathbb{C}^n$
Soit $u, v \in \mathbb{C}^n, u \neq 0_E, v \neq 0_E$ et (u, v) libre.
$u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, et $v = (b_1, \ldots, b_n)$.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, avec $x \in \mathrm{Vect}(u,v) \Leftrightarrow \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$x = \lambda u + \mu v \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases} :$$

ce sont équations paramétriques d'un plan.

Remarque 3. Le seul plan de $\mathbb{R}^2$ est $\mathbb{R}^2$ lui-même.

Démonstration. **Sens direct** Il existe deux vecteurs non colinéaires,

$$\begin{array}{c} u = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ v = (a',b') \in \mathbb{R}^2 \end{array},$$

tels que $P = \mathrm{Vect}(u,v)$, donc $P \subset \mathbb{R}^2$.

Réciproquement Soit $x \in \mathbb{R}^2, \exists\ x_1, x_2$ tel que $x = x_1(1,0) + x_2(0,1)$.
Montrons que $(1,0) \in \mathrm{Vect}(u,v)$.
De même, $(0,1) \in \mathrm{Vect}(u,v)$.
Cherchons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{array}{rcl} (1,0) & = & \lambda(a,b) + \mu(a',b') \\ & = & (\lambda a + \mu a', \lambda + \mu b') \end{array},$$

donc

$$\begin{cases} 1 = \lambda a + \mu a' \\ 0 = \lambda b + \mu b' \end{cases},$$

donc

$$\lambda b = -\mu b',$$

d'où, si $b \neq 0$,

$$\lambda = -\mu \frac{b'}{b},$$

donc

$$1 = (-\mu \frac{b'}{b} a + \mu a') :$$

u et v sont non colénaires si et seulement si

$$1 = \mu \left(\frac{-ab' + a'b}{b} \right),$$

ce qui est possible, car $\boxed{ab' - a'b \neq 0.}$
On a donc

$$\mu = \frac{b}{-ab' + a'b},$$

donc

$$(1,0) \in \mathrm{Vect}(u,v).$$

Même raisonnement pour $(0,1)$:
$(0,1) \in \mathrm{Vect}(u,v)$, donc $((0,1),(1,0)) \in P$, donc $\mathbb{R}^2 \subset P$.

$\square$

Équations cartésiennes d'une droite de $\mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, alors

$$D = \text{Vect}((a_1, a_2)) :$$

$$x \in D \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \mid \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda a_1 \\ x_2 = \lambda a_2 \end{array} \right. .$$

Si $a_1 \neq 0$ et $a_2 = 0$, alors $x_2 = 0$, et, $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x_2 = 0$, $x \in D$.
Si $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq 0$, alors

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

donc

$$a_1 x_1 - a_1 x_2 = 0$$

est l'équation cartésienne d'une droite dans $\mathbb{R}^2$.

Si $n = 3$, même raisonnement :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda a_1 \\ x_1 = \lambda a_2 \\ x_2 = \lambda a_3 \end{array} \right. .$$

Supposons $a_3 \neq 0$. On a donc

$$\lambda = \frac{x_3}{a_3} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a_1}{a_2} x_3 \\ x_2 = \dfrac{a_2}{a_3} x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_2 x_1 - a_1 x_3 = 0 \\ a_3 x_2 - a_2 x_3 = 0 \end{array} \right.$$

est l'équation *cartésienne* d'une droite dans $\mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^n$, les équations cartésiennes d'une droite sont de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{n-11}x_1 & + & \cdots & + & a_{n-1n}x_n & = & 0 \end{array} \right. ,$$

système de $n - 1$ équations linéaires.

Théorème 1 (Équations cartésiennes d'un plan dans $\mathbb{R}^3$.)**.** *Soient $a, b, c, \in \mathbb{R}$, tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.*
On a alors $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$ qui est un plan de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. Soit $x \in P$. Supposons $a \neq 0$. On a alors

$$ax_1 = -bx_2 - cx_3,$$

donc

$$x_1 = -\frac{b}{a} x_2 - \frac{c}{a} x_3,$$

donc

$$\begin{aligned} x &= \left(-\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3, x_2, x_2\right) \\ &= x_2 = \left(-\frac{b}{a}, 1, c\right) + x_3\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right) \end{aligned},$$

donc

$$P = \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right), \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)\right).$$

Montrons que la famille

$$\left(\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right), \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)\right)$$

est libre.
On a

$$\lambda_1\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right) + \lambda_2\left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right) = (0,0,0),$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

donc P est un plan, dont une base est

$$\left(\left(-\frac{b}{a}, 1, 0\right), \left(-\frac{c}{a}, 0, 1\right)\right).$$

□

Remarque 4. Dans $\mathbb{R}^3$, l'équation d'une droite D est de la forme :
$\exists\ a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ tels que

$$x \in D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0 \end{array} \right. :$$

$$P_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$$

et

$$P_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0\}$$

sont des plans,
et $D = P_1 \cap P_2$ une droite.

Chapitre 7

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$

Définition 1. On appelle polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}$, toute somme finie P de la forme :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_k X^k + \cdots + a_1 X + a_0,$$

avec

$$n \in \mathbb{N}, \text{ et } (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Seul un nombre *fini* de coefficients est non nul.
On écrit aussi

$$P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k,$$

qui est une somme finie, car un nombre fini de a_k est non nul.

Axiome 1. $X^0 = 1$

Exemple 1. $\sum_{k \geq 0} a_k X^k$
$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 4,\ a_3 = 4,\ a_4 = 42,\ a_5 = 98,\ a_6 = 56,\ a_k = 0\ \forall\ k \geq 7$
$P = 56X^6 + 4X^3 + X$

Définition 2 (Degré)**.** Si $P \in \mathbb{R}[X]$, avec

$$P = \sum_{k \geq 0} q_k X^k,$$

on appelle degré de P, $\deg(P)$, le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$, et $a_{\deg(P)}$ est le coefficient dominant de P.

Définition 3. Si ce coefficient est égal à 1, on dit que P est "unitaire".

Définition 4. On note 0 le polynôme nul, celui dont tous les coefficients sont nuls.

Axiome 2. $\deg(0) = -\infty$.

Définition 5 (loi +)**.** Si $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, avec

$$P = \sum_{k\geq 0} q_k X^k \text{ et } Q = \sum k \geq 0 b_k X^k,$$

alors

$$P + Q = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) X^k.$$

Exemple 2. $P = 56X^6 + 4X^3 + X$
$Q = 4X^7 + X^3 - X^2 + X$
on a $\deg(P) = 6$ et $\deg(Q) = 7$
$P + Q = (0 + 4)X^7 + (56 + 0)X^6 + 0X^5 + 0X^4 + (4 + 1)X^3 + (1 + 0)X + (0 + 1)$

Définition 6 (loi externe $\cdot$)**.** Si $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times R[X]$, avec

$$P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k,$$

alors

$$\lambda \cdot P = \sum_{k\geq 0} (\lambda a_k) X^k.$$

Théorème 1. $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel*

Démonstration. 1. $(\mathbb{R}[X], +)$ est un groupe commutatif

(a) La loi "+" est interne : Si

$$P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k,$$

alors

$$\left.\begin{array}{r} \deg P = n \\ degQ = m \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a_k = 0 \forall k > n \\ b_k = 0 \forall k > m \end{array}\right\} \Rightarrow a_k + b_k + 0 > \max(n, m), \forall k,$$

donc $P + Q$ est un polynôme, car seul un *nombre fini* de ses coefficients$\in \mathbb{R}$ est *non nul*, et on a montré que

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

(b) "+" est commutative :

$$P + Q = \sum_{k\geq 0} (a_k + b_k) X^k = \sum_{k\geq 0} (b_k + a_k) X^k = Q + P.$$

(c) "+" est associative : on vérifie que

$$(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, P+(Q+R) = (P+Q)+R,$$

ce qui est vrai, car "+" est associative dans $\mathbb{R}$.

(d) l'élément neutre 0
$P + 0 = \sum_{k\geq 0}(a_k+0)X^k = \sum_{keq0} X^k = P = 0 + P$

(e) Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ possède un opposé
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, cherchons $Q \in \mathbb{R}[X]$
tel que $P + Q = 0$
$P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k, Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$
$P + Q = \sum_{k\geq 0}(a_k + b_k)X^k = 0 \Leftrightarrow a_k + b_k = 0$
$\Rightarrow b_k = -a_k$ et $Q = \sum_{k\geq 0} -a_k X^k = (-1).P$
$\Rightarrow (\mathbb{R}[X],+)$ est un groupe commutatif

2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$, avec

$$P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k etQ = \sum_{k\geq 0} b_k X^k,$$

$\lambda.(P+Q) = \sum_{k\geq 0}\lambda(a_k+b_k)X^k = \sum_{k\geq 0}(\lambda a_k + \lambda b_k)X^k = \lambda.P + \lambda.Q$

3. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$
$\lambda.(\mu.P) = \lambda.\sum_{k\geq 0}\mu a_k X^k = \sum_{k\geq 0}\lambda.(\mu.a_k)X^k = \sum_{k\geq 0}(\lambda.\mu)a_k X^k = (\lambda.\mu).P$

4. $\forall \lambda, \mu.P = \sum_{k\geq 0}(\lambda+\mu)a_k X^k = \sum_{k\geq 0}(\lambda a_k + \mu a_k)X^k = \lambda P + \mu P$

5. $1.P = P$

□

Théorème 2. *L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n,* $\mathbb{R}_n[X]$*, est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$*.*

Démonstration. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X] \Rightarrow P + Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(P+Q) \leq \max(n,n) \leq n$
$\Rightarrow P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda P \in \mathbb{R}_n[X]$: Si $\lambda \neq 0 \quad \deg(\lambda.P) = \deg(P)$ □

Théorème 3. *L'ensemble des polynômes de degré n,* $(\mathbb{R}_n[X]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[X])$*, n'est pas un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}[X]$*.*

Démonstration. $0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $0 \notin (\mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X])$, donc $(\mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X])$ n'est pas un espace vectoriel. □

Remarque 1. Dans $\mathbb{R}_n[X]$ la famille $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est libre :
Soit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \lambda_0 1 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \ldots + \lambda_n X^n = 0$ (0 est ici le polynôme nul)
$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$

Définition 7 (Autre loi *interne* : la multiplication .)**.** Soit $P \in \mathbb{R}[X] \quad P = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$
$Q \in \mathbb{R}[X], Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$
$P.Q = \sum_{k\geq 0} C_k X^k$, avec $C_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{j_1+j_2=k} a_{j_i} b_{j_2}$

Exemple 3. $P = 5X^4 + X^3 - X^2 + 2X + 1 \qquad Q = X^3 + 2X^2 - X + 5$
$P.Q = \sum_{k\geq 0} C_k X^k$
$C_0 = \sum_{j_1+j_2=0} a_{j_1} b_{j_2} = a_0 b_0 = 1.5$
$C_1 = \sum_{j_1+j_2=1} a_{j_1} b_{j_2} = a_1 b_0 + a_0 b_1 = 2.5 + 1.(-1) = 9$
$C_2 = \sum_{j_1+j_2=2} a_{j_1} b_{j_2} = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = (-1).5 + 2.(-1) + 1.2 = -5$
$C_3 = \sum_{j_1+j_2=3} a_{j_1} b_{j_2} = a_3 b_0 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_0 b_3$
Pour C_5 et ceux qui suivent, certains coefficients sont nuls :
$C_5 = \sum_{j_1+j_2=5} a_{j_1} b_{j_2} = a_4 b_1 + a_3 b_2 + a_2 b_3$
$C_6 = a_4 b_2 + a_3 b_3$
$C_7 = a_4 b_3$

Théorème 4. $\deg(P.Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Démonstration. Supposons $\deg(P) = n, \deg(P) = m$
si $k_0 > n + m, C_{k_0} = 0; C_{k_0} = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$
or si $j > m \Rightarrow a_j = 0 \Rightarrow C_{j_0} = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{k-j}$
or si $a \leq j \leq n \Rightarrow k_0 - n > m \Rightarrow b_{k_0-j} = 0$ si $0 \leq j \leq n$ car $k_0 - j > m$
$C_{n+m} = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n+m-j} = a_n b_m$ or $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0 \Rightarrow C_{n+m} \neq 0 = a_n b_m$ □

Théorème 5. *Corollaire Si* $P \neq 0$ *(*$0 =$ *polynôme nul) et* $Q \neq 0$
alors $P.Q \neq 0$ *ce qui équivaut à :*
$P.Q = 0 \Rightarrow P = 0$ *ou* $Q = 0$

Démonstration. $P \neq 0$ et $Q \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \deg(P) = n, n \in \mathbb{N}, \text{son coefficient dominant } a_n \neq 0 \\ \deg(Q) = m, m \in \mathbb{N}, \text{son coefficient dominant } b_m \neq 0 \end{cases}$
$\deg(P.Q) = n + m$, et $a_n b_m$ son coefficient dominant est non nul, ce qui implique $P.Q \neq 0$ □

Théorème 6. $\cdot$ *est distributive par rapport à* $+$ *:*
$\forall\ P, Q, R \in \mathbb{R}[X] P.(Q + R) = P.Q + P.R$
$\cdot$ *est commutative :*
Seuls les polynômes constants non nuls possèdent un inverse

Théorème 7. *Corollaire : règle de simplification* $\forall (P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2 \times \mathbb{R}[X]^*$,

$$P \cdot R = Q \cdot R \Rightarrow P = Q.$$

Démonstration. Si $P.R = Q.R \Leftrightarrow\ P.R - Q.R = 0 \Leftrightarrow\ (P - Q).R = 0$
D'après le corollaire 1 :
$\Rightarrow P.Q = 0$ ou $R = 0$.
Or $R \neq 0$ donc $P = Q$. □

Théorème 8 (Division euclidienne)**.** *Soit* $A = \mathbb{R}[X]$ *et* $B \in \mathbb{R}[X], B \neq 0$
alors si $A \neq 0$*, il existe un unique couple* $(Q, R), Q \in \mathbb{R}[X], R \in \mathbb{R}[X]$ *tel que :*
$A = B.Q + R$ *et* $\deg(R) < deg(B)$

Démonstration. **Unicité**
Soit A et $B \in \mathbb{R}[X]$, non nuls, supposons qu'il existe Q, Q' et $R, R' \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$A = B.Q + R + B.Q' + R'$ avec $\deg R < \deg B$, $\deg R' < \deg B'$
$\Leftrightarrow B.Q - BQ' = R' - R \Leftrightarrow B.(Q - Q') = R' + R$
or $\deg(B.(Q - Q')) = \deg B + \deg(Q - Q')$
Si $Q \neq Q' \Rightarrow \deg(B.(Q - Q')) \geq \deg(B)$
or $\deg(R - R') \leq \max(\deg(B), \deg(B')) < \deg B$
impossible
$\Rightarrow Q = Q' \Rightarrow B(Q - Q') = B.0 = 0 \Rightarrow R - R' = 0 \Rightarrow R = R'$

Existence
$A \neq 0$
$B = b_pX^p + b_{p-1}Xp - 1 + \cdots + b_kX^k + \cdots + b_0$ $\deg(B) = p, b_p \neq 0$
Soit $A \in \mathbb{R}[X], \deg(A) < \deg(B)$
alors $Q = 0$ et $R = A$: on a $A = B.Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$

Raisonnement par récurrence sur le degré de A Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq p$
Supposons que pour tout polynôme A de $\mathbb{R}[X]$
tel que $\deg(A) \leq n$, le théorème est vrai.
Montrons qu'il est vrai, $\forall\ A \in \mathbb{R}[X], \deg(A) = n + 1$
Soit $A = a_{n+1}X^{n+1} + a_nX^n + \cdots + a_kX^k + \cdots + a_0$ $an + 1 \neq 0$
Soit $Q_1 = \frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n+1-p}$
$A - B.Q_1 = a_{n+1}X^{n+1} + a_nX^k + \cdots + a_n - \frac{a_{n+1}}{b_p}X^{n+1-1}(b_pX^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b)$
$= \left(a_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{b_p}b_p\right)X^{n+1} + \left(a_n - \frac{a_{n+1}b_p}{b}{}_{p-1}\right)X^n + \cdots + a_0$
$\Rightarrow A - BQ = \left(a_n - \frac{a_{n+1}}{b_p}b_{p-1}\right)X^n + \cdots$
$\Rightarrow \deg(A - B.Q) \leq n$
et donc d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un unique couple (Q', R') $\deg(R') < B$ tel que $A - BQ_1 = BQ' + R'$
$\Rightarrow A = BQ_1 + BQ' + R'$
$A = B(Q_1 + Q') + R'$
$\Rightarrow$ L'hypothèse est vraie $\forall\ A \in \mathbb{R}[X]\ \deg(A) = n + 1$
$\Rightarrow$ L'hypothèse est vraie $\forall\ A \in \mathbb{R}[X], A \neq 0, \forall \deg(A)$ $\square$

Exemple 4. $A = X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 1$.
$B : X^3 + X^2 + 1 : X^2 + X - 2$ donc on prend $Q_1 = X^2$ et $Q_2 = X$ et $Q_3 = -2$.
$-Q_1B = -(X^5 + X^4 - 0X^3 + X^2 + 0X + 0)$.
$A - Q_1B = X^4 - X^3 + 2X^2 - 1$.
On prend $A_1 = A - Q_1B$.
$-Q_2B = -(X^4 + X^3 + 0X^2 + X)$.
$A_1 - Q_2B = -2X^3 + 2X^2 - X - 1$.
$-Q_3B = -(-2X^3 - 2X^2 - 2)$.
$A_1 - Q_2B - Q_3B = 4X^2 - X + 1$ est de degré égal à $2 < \deg(B) \Rightarrow$ c'est le reste !
Donc : $A - Q_1B - Q_2B - Q_3B = R = 4X^2 - X + 1$.
soit $A = B(Q_1 + Q_2 + Q_3) + R$, et on a $Q = X^2 + X - 2 = Q_1 + Q_2 + Q_3$ et $R = 4X^2 - X + 1$.

Définition 8. $B \in \mathbb{R}[X], A \in \mathbb{R}[X]$, on dit que B divise A si et seulement si le reste de la division de A par B est nul :
$\exists\ Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = B.Q$

Définition 9. Soit $P \in \mathbb{R}[X], P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$
On appelle application polynomiale P, l'application
de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x) \in \mathbb{R}$ On appelle racine de P tout nombre réel a, tel que $P(a) = 0$.

Théorème 9. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$
$(X - a)$ *divise* $P \Leftrightarrow P(a) = 0 \in \mathbb{R}$ *i.e.* a *est une racine de* P.

Démonstration. Supposons $X - a$ divise P
alors $P(a) = (a - a).Q(a) = 0 \in \mathbb{R}$
Réciproquement : Supposons $P(a)$
Faisons la division euclidienne de P par $X - a$
alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X], R \in \mathbb{R}[X]$, unique tel que $P = (X - a)Q + R \deg R < \deg(X - a)$
Soit $\deg(R) \leq 0 \Rightarrow R$ est un polynôme constant.
$P(a) = 0 = (a - a)Q(a) + R(a) \Rightarrow R = 0$ □

Chapitre 8

Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 1. K un corps commutatif $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q})$
E un K-espace vectoriel est dit de dimension finie si il existe dans E, une famille *génératrice*, et *finie* $(u_1, \ldots, u_n)$ et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = E$

Convention :
Si $E = \{0\}$, on dit E est de dimension finie $= 0$ et sa base est $\emptyset$.

Théorème 1. *De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base, et donc tout K-espace vectoriel de dimension finie admet une base de cardinal fini.*

Démonstration. Soit S une famille géératrice de E, finie *i.e.* $\mathrm{Vect}(S) = E$ avec $E \neq \{0\}$
alors $\exists\ u \neq 0, u \in S$, et (u) est libre.
Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de toutes les parties de S (*i.e.*les sous-familles de S qui sont libres.
On a $\mathcal{L} \neq \emptyset$ $\mathcal{L}$ contient la famille (u)
S est finie $\Rightarrow$ l'ensemble de ses parties est fini
si $\mathrm{Card}(S) = n$ alors $\mathrm{Card}(\text{Parties de } S) = 2^n$
donc $\mathcal{L}$ est finie ; donc il existe une famille dans $\mathcal{L}$ quit soit de cardinal maximal, on la note B.
Montrons que $S \subset \mathrm{Vect}(B)$
Si cela n'est pas le cas alors $\exists\ v \in S$ et $v \notin \mathrm{Vect}(B)$
$\Rightarrow$ la famille $B \cup \{v\}$ est libre :
Ecrivons $B = (b_1, \ldots, b_n)$
$\lambda v + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_k b_k = 0$
$\lambda_1, \beta_1, \ldots, \beta_k \in K$ Si $\lambda \neq 0$ alors $v = -\frac{\beta_1}{\lambda} b_1 - \ldots - \frac{\beta_k}{\lambda} b_k$
$\Rightarrow$ v est une combinaison linéaire de $b_1, \ldots, b_n \Leftrightarrow v \in \mathrm{Vect}(B)$
ce qui est contraire à l'hyp.
$\Rightarrow$ La famille $(v, b_1, \ldots, b_k)$ est libre
or $\{v\} \cup B \subset S$ et est libre.
$\Rightarrow \{v\} \cup B \in \mathcal{L}$
or $\mathrm{Card}(\{v\} \cup B) = \mathrm{Card}(B) + 1$
contradition car $B \in \mathcal{L}$ et est de cardinal maximal $\Rightarrow S \subset \mathrm{Vect}(B)$
Or $\forall\ w \in E, w$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de S car S est génératrice

or $S \subset \mathrm{Vect}(B)$ donc $\mathrm{Vect}(S) \subset \mathrm{Vect}(B)$
$\Rightarrow w \in \mathrm{Vect}(B) \Rightarrow E \subset \mathrm{Vect}(B)$
or $\mathrm{Vect}(B) \subset E$ donc $E = \mathrm{Vect}(B)$
Donc B est une base de E. $\square$

Remarque 1. Si $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E, alors toute famille obtenue en retirant des vecteurs à $\mathcal{F}$ reste libre.

Remarque 2. Si $\mathcal{F}$ est une famille liée de vecteurs de E, alors toute famille obtenue en ajoutant des vecteurs à $\mathcal{F}$ est liée.

Lemme 1 (de l'échange)**.** *Soit E un K-espace vectoriel*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E$
Si $v_1, \ldots, v_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$
alors $(v_1, v_2, \ldots, v_{n+1})$ est liée.

Démonstration. Par récurrence sur n.
Pour $n = 1$, on aura $u_A \in E, v_A, v_2 \in \mathrm{Vect}(u_1)$.
Si $v_1 = 0$ alors (v_1, v_2) liée.
Si $v_1 \neq 0$ alors $u_1 \neq 0 \wedge \exists \lambda_1 \in K^*,\ \lambda_2 \in K$.
$v_1 = \lambda_1 u_1$.
$v_2 = \lambda_2 u_1$.
$\lambda_1 \neq 0$ donc $v_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_1$ donc (v_1, v_2) liée.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que le lemme soit vrai, montrons qu'il est vrai pour $n + 1$.
Soit $v_1, \cdots, v_{n_1}$ une famille de E et $v_1, \cdots, v_{n+2} \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \cdots, u_{n+1})$.
Si $v_{n+2} = 0$ alors $(v_1, v_2, \cdots, v_{n+2})$ est liée.
Si $v_{n+2} \neq 0$, on va montrer que l'on peut échanger l'un des vecteurs u_1 par v_{n+2} dans $(u_1, \cdots, u_n)$, sans changer le ss espace engendré :
Soit $V = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{n+1})$.
$v_{n+2} \in V \Rightarrow \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1} \in K$ non tous nuls, tels que :
$v_{n+2} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_{n+1} u_{n+1}$.
Supposons que $\lambda_{n+1} \neq 0$. (Sinon changer la numérotation des u_1).
Alors $u_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} v_{n+1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} u_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} u_n$.
Donc $u_{n+1} \in \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v_{n+2}) \Rightarrow V \subset \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v_{n+2})$ et comme $u_1, u_2, \cdots, u_n$ et $v_{n+2} \in V$.
On a $\mathrm{Vect}(u_1, u_n, u_{n+1}) = \mathrm{Vect}(u_1, u_n, v_{n+2}) = V$.
Or, $\forall i = 1 \cdots n+1,\ v_1 \in V$ donc $v_1 \in \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, v_n + 2)$ donc $\forall i = 1, \cdots, n+1,\ \exists \beta_i \in K,\ \lambda_{1,i}, \cdots, \lambda_{n,i} \in K$ tel que $v_i = \beta_i v_{n+2} + \lambda_{1,i} u_1 + \cdots + \lambda_{n,i} u_n$ donc $v_i - \beta_i v_{n+2} \in \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ $\forall i = 1, \cdots n+1$.
Ainsi, les $n+1$ vecteurs $v_i - \beta_i v_{n+2}$ sont dans $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, la famille $(v_1 - \beta_1 v_{n+2}, \cdots, v_{n+1} - \beta_{n+1} v_{n+2})$ est liée, alors
$\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1} \in K$, non tous nuls tels que :
$\alpha_1(v_1 - \beta_1 v_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+1}(v_{n+1} - \beta_{n+1} v_{n+2}) = 0$ donc $(v_1, v_2, \cdots, v_{n+2})$ liée. $\square$

Théorème 2 (de la dimension)**.** *Dans un K-espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Définition 2. Si E est un K-espace vectoriel de dimension finie, on appelle dimension de E, notée $\dim_K E$ ou $\dim E$ le nombre de vecteurs des bases de E.

Démonstration du théorème 2. E un K-espace vectoriel
$\mathcal{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ une base de E (génératrice et libre)
$\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une autre base de E
Montrons que $k \Rightarrow n$
$v_1, \dots, v_k \in E$ et $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ et d'après lemme de l'échange
Si $k \geq n+1 \Rightarrow$ la famille $\mathcal{V}$ est liée
Or $\mathcal{V}$ est libre implique $k \leq n$
De même, $u_1, \dots, u_n \in E$ et $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$
cat $\mathcal{V}$ est une base de E
donc $u_1, \dots, u_n \in \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$
et d'après le même lemme, si $n \geq k+1$
la famille $\mathcal{U}$ est liée ? Or elle est libre, donc $n \leq k$
Ansi : $k \leq n$ et $n \leq k \Rightarrow n = k$ □

Exemple 1. $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel une base est $((1,0),(0,1))$
$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^2 = 2$
dans $\mathbb{R}^2$, la famille $((1,1),(1,2),(2,1))$ est liée

Exemple 2. $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice
$\forall\ u \in \mathbb{R}^n, \exists\ a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que $u = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$
la famille est libre : si $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n = (0, \dots, 0) \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$
$\Rightarrow (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$

Exemple 3. $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel : $S = (1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$.
En effet S est génératrice : $\forall\ z \in \mathbb{C}, \exists\ a, b \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + ib$
S est libre : $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (def de $\mathbb{C}$)
Donc $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$
$\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ en effet (1) est une base de $\mathbb{C}$

Exemple 4. L'ensemble des polynômes : $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie (il n'existe pas de famille génératrice finie)

Exemple 5. Par contre $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$ est de dimension finie : une base :
$(1, X, X^2, \dots, X^n)$ $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

Théorème 3 (généralisation du théorème 1)**.** *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, soit L une famille libre de E et S une famille génératrice de E tel que $L \subset S$*
Alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset S$

Démonstration. La même que pour le théorème 1 avec $\mathcal{L}$ = l'ensemble des parties libres de S *qui contiennent L* □

Remarque 3. Ansi si $L \subset E$ et L libre, il existe une base de E qui contient L.
Si $S \subset E$ et S génératrice, alors il existe une base B de E, incluse dans S.

Proposition 1. *Soit E, un K-espace vectoriel,* $\dim E = n$

1. *Toute famille libre de E a au plus n éléments*
2. *Toute famille libre à n éléments est une base*
3. *Toute famille génératrice a au moins n éléments*
4. *Toute famille génératrice à n éléments est une base*

Corollaire 1. *Soit $S = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de E et* $\dim E = n$
alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *S est une base*
2. *S est génératrice*
3. *S est libre*

Exemple 6. $E = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim E = 3$
$S_1 = ((1,1,1),(2,1,0))$ n'est pas génératrice car $2 < \dim E$
$S_1 = ((1,1,1),(2,1,0),(0,1,0),(0,1,1))$ est liée cat $4 > \dim E$
$S_3 = ((1,1,1),(2,1,0),(0,1,0))$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

Démonstration. (de la proposition 1)

1. Soit L une famille libre de E, à k vecteurs, d'après le théorème 3 il existe B une base de E tel que $L \subset B \Rightarrow k \leq n$
2. Si $k = n \Rightarrow L = B$ alors L est une base
3. Si S est génératrice, il existe B, base de E telle que $B \subset S \Rightarrow n \leq \ell$ et contient ℓ vecteurs
4. Si $l = n$ alors $B = S$ donc S est une base

□

Théorème 4 (de la base incomplète)**.** *Soit E un K-espace vectoriel,* $\dim E = n$
Pour toute famille libre L de E, pour toute famille génératrice S de E il existe une famille S' telle que $S' \subset S$ et $S' \cap L = \emptyset$ telle que $L \cup S'$ soit une base de E

Signification : de toute famille libre de E, on peut construire une base en y ajoutant des vecteurs d'une famille génératrice

Exemple 7. $E = \mathbb{R}^4$
$a_1 = (1,-1,2,2)$ $a_2 = (2,-1,2,4)$
$A = (a_1, a_2)$
A est libre :

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 1\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$ est une base dans $\mathbb{R}^4$
Il suffit de prendre 2 vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) tel que (a_1, a_2, e_i, e_j) soit libre : ainsi (a_1, a_2, e_i, e_j) sera une base de $\mathbb{R}^4$
par exemple $a_1, a_2, e_3, e_4)$ est libre donc c'est une base

Théorème 5. *Soit E un K-espace vectoriel,* $\dim E = n$ *et F un sous-espace vectoriel de E alors F est de dimension finie,* $\dim F = k$ *et $k \leq n$. Et si $k = n$, alors $F = E$*

Démonstration. Soit L une famille libre dans F donc L est libre dans $E \Rightarrow$ elle contient au plus n vecteurs d'après le théorème 3, il existe une base B de F, telle que $L \subset B$, et comme B est libre, B contient k éléments et $k \leq n$
Si $k < k$ alors $F \neq E$ (B ne peut pas être générateur dans E)
Si $k = n$ alors $F = E$ car B est libre et contient n vecteurs, donc c'est aussi une base de E donc $F = E$ □

Exemple 8. $E = \mathbb{R}^3$
$u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 2, 0)$ $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$
$v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (1, 0, 2)$ $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$

Calculer $\dim F$, $\dim G$
Montrer que $F = G$.
NB : $1 \leq \dim F \leq 2$, $1 \leq \dim G \leq 2$, $(u_1, u_2 \neq 0)$
u_1 et u_2 non colinéaires donc $\dim F = 2$, de même v_1, v_2 non colinéaires
donc $\dim G = 2$
$u_1 = v_1 + v_2 \Rightarrow u_1 \in G$
$u_2 = 2v_1 + v_2 \Rightarrow u_1 \in G$
$\Rightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de G, or $\dim F = \dim G$ donc d'après le théorème 5, $F = G$

Définition 3 (supplémentaires)**.** Soit E un F-espace vectoriel, F et G des sous-espace vectoriel de E. F et G sont dits supplémentaires si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$
on note $E = F \oplus G$

Signification : Si $E = F \oplus G$, alors $\forall\ v \in E$, il existe un unique $u \in F$, un unique $v \in G$ tels que $v = u + w$

Démonstration. unicité de la décomposition
Supposons $v = u + w$, $u \in F$, $w \in G$
et $v = u' + w'$, $u \in F$, $w' \in G$
alors $u + w = u' + w'$ soit $u - u' = w - w'$
or $u - u' \in F$ et $w - w' \in G$
donc $u - u' \in G \Rightarrow u - u' \in F \cap G \Rightarrow u - u' = 0$
donc $u = u'$ et donc $w' = w$ □

Théorème 6. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension n. Tout sous-espace vectoriel de E, F, admet au moins un supplémentaire G et* $\dim F + \dim G = n$

Démonstration. Si $\dim E = 0 \Leftrightarrow E = \{0\}$ OK
Si $\dim E = 1$ alors $\exists\ v \neq 0, E = \text{Vect}(v)$, les seuls sous-espace vectoriel de E sont E ou $\{0\}$ OK
Supposons $\dim F \geq 2$ Soit F un sous-espace vectoriel de E, $\dim F = k$ avec $k < n$, et $(f_1, \ldots, f_k)$ une base de F, donc est une famille libre de E, alors d'après le théorème de la base incomplète il existe $e_{k+1}, \ldots, e_n$ des vecteurs d'une base de E, tels que $B = (f_1, \ldots, f_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$

soit une base de E :
On pose $G = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$
alors $F \oplus G = E$
car : comme B est une base de E, $\forall\ v \in E, \exists\ \underbrace{\alpha_1 f_1, \dots, \alpha_k f_k}_{\in F} + \underbrace{\alpha_{k+1}e_{k+1} + \dots + \alpha_n e_n}_{\in G}$
$\Rightarrow E \subset F + G$ et comme $F + G \subset E$, on a $E = F + G$
Montrons que $F \cap G = \{0\}$
Soit $v \in F \cap G \Rightarrow v \in F$ donc
$\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ tels que $v = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$
$v \in G \Rightarrow \exists\ \beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in K, v = \beta_{k+1}e_{k+1} + \dots + \beta_n e_n$ donc $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k - \beta_{k+1}e_{k+1} - \dots - \beta_n e_n = 0$
or $(f_1, \dots, f_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est libre $\Rightarrow \alpha_1 = \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$
$\Rightarrow v = 0$ donc $F \cap G \subset \{0\}$, comme $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel on a toujours $\{0\} \subset F \cap G \Rightarrow F \cap G = \{0\}$ □

Proposition 2. *Soit F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E*

$$(E = F \oplus G)$$

$$\Leftrightarrow (F \cap G = \{0\} \ \text{et} \ \dim F + \dim G = \dim E)$$

$$\Leftrightarrow (F + G = E \ \text{et} \ \dim F + \dim G = \dim E)$$

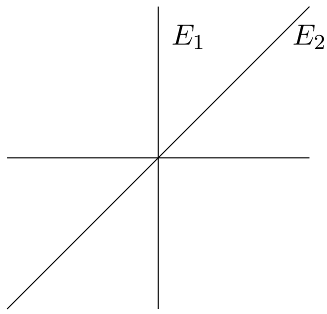
Démonstration. Supposons $\dim E \geq 2, \dim E = n$
F, G, deux sous-espace vectoriel de E, $\dim F = p$, $\dim G = q$
$(f_1, \dots, f_n)$ une base de E
$(g_1, \dots, g_n)$ une base de G
Supposons : $E = F \oplus G$
Montrons que $F \cap G = \{0\}$, il reste à montrer que $p + q = n$
$E = F + G \Rightarrow (f_1, \dots, f_p, g_1; \dots, g_q)$ est génératrice dans E. Montrons qu'elle est libre (R*) :
$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p + \beta_1 g_1 + \dots + \beta_q g_q = 0$
$\Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p = -\beta_1 g_1 - \dots - \beta_q g_q \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p \in G \Rightarrow \in F$
$\Rightarrow \in F \cap G$ or $F \cap G = \{0\} \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_p f_p = 0$
or $(f_1, \dots, f_n)$ est libre $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$
$\Rightarrow \beta_1 g_1 + \dots + \beta_q g_q = 0$ et comme $(g_1, \dots, g_q)$ libre $\Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_q + 0$
$\Rightarrow (f_1, \dots, g_1, \dots, g_q)$ est libre et génératrice $\Rightarrow$ c'est une base de $F + G$ donc de $E \Rightarrow \dim E = p + q = \dim F + \dim G$
Réciproquement : Si $\cap G = \{\}$ et $\dim E = p + q$
$\Rightarrow (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ a $p + q$ éléments : elle est libre car $F \cap G = \{0\}$ (même raisonnement que (R*)) et $\dim E = p + q$
$\Rightarrow (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de $E \Rightarrow E = F + G$
Démonstration b : même raisonnement □

Proposition 3. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors*

$$\dim(F + G) = \dim G + \dim F - \dim(F \cap G)$$

Exemple 9. $E = \mathbb{R}^2$ $F = \mathrm{Vect}\,((0,1))$
Trouver tous les supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^2$ base de $\mathbb{R}^2$: $((1,0),(0,1))$

Trouver G supplémentaire équivaut à trouver G tel que $F + G = \mathbb{R}^2$ et $\dim G = 1$
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \neq (0, 0$
$\Rightarrow \dim \text{Vect}\,((a, b)) = 1$
Si $((0, 1), (a, b))$ est libre $\Rightarrow$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 = F + G$
i.e. (a, b) tel que $a \neq 0$ alors $((0, 1), (a, b))$ est libre
$\Leftrightarrow F \neq G$



$E' = E_1 \oplus E_2$

Exemple 10. $E = \mathbb{R}_4[X]$ = l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 4, espace vectoriel de $\dim(E) = S,\ F = \text{Vect}(X^2 + 1, X^3 + X)$.
Chercher un supplémentaire de F dans E : Il suffit de trouver $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}_4[X]$ t.q. la famille $(X^2 + 1, X^3 + X, v_1, v_2, v_3)$ soit libre. A faire en exo.

Définition 4 (Projection)**.** Soit E un K-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires : $E = E_1 \bigoplus E_2$.
Alors, $\forall\ x \in E$, il existe un unique $x_1 \in E_1$ et un unique $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. La projection p sur E_1, parrallélement à E_2 est l'application qui à x associe x_1 : $p(x) = x_1$ si $x = x_1 + x_2,\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$.

Proposition 4. *p est linéaire, $p \circ p = p,\ \ker(p) = E_2,\ \text{Im}(p) = E_1$.*

Démonstration. $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2$.
$y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in E_1,\ y_2 \in E_2$.
$x + y = x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ avec $x_1 + y_1 \in E_1$ et $x_2 + y_2 \in E_2$. La décomposition est unique, donc $p(x + y) = x_1 + y_1 = p(x) + p(y)$.
$\forall \lambda \in K,\ p(\lambda x) = \lambda x_1 = \lambda p(x) \Rightarrow p$ linéaire.
$\forall x \in E,\ x = x_1 + x_2$.
$p \circ p(x) = p(x_1) = x_1 = p(x) \Rightarrow p \circ p = p$.
$\text{Im}(p) = \{p(x),\ x \in E\}$.
Montrons que $\text{Im}(p) = E_1$, on sait que $\text{Im}(p) \subset E_1$,
Montrer que $E_1 \subset \text{Im}(p)$: soit $z \in E_1 \Rightarrow p(z) \Rightarrow z$ a un antécédent donc $z \in \text{Im}(p) \Rightarrow E_1 \subset \text{Im}(p) \Rightarrow \text{Im}(p) = E_1$.
$\ker(p) = E_2$. Montrons que $\ker(p) \subset E_2$: si $x \in E$ et $p(x) = 0$ alors $x = x_1 + x_2$ et $p(x) = x_1 = 0 \Rightarrow x = x_2,\ x_2 \in E_2 \Rightarrow x \in E_2$.
Montrons $E_2 \subset \ker(p)$.
Soit $x \in E_2 \Rightarrow x = 0 + x_2 \Rightarrow p(x) = 0 \Rightarrow x = \ker(p)$. $\square$

Chapitre 9

Applications linéaires en dimension finie

E, un K-espace vectoriel, $\dim E = n$, base de E : $(e_1, e_2, \dots, e_n)$
Soit F un K-espace vectoriel

Proposition 1. *Soit f un application linéaire de E dans F.*
Alors $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im} f$

Démonstration. $\mathrm{Im} f = \{f(u), u \in E\}$ $v \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists\, u \in E, v = f(u)$
or $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $u \in E \Leftrightarrow$ il existe une unique suite $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ avec :
$u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$
$f(u) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)$
$\Rightarrow v \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
$\Rightarrow \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$
Réciproquement : $f(e_1) \in \mathrm{Im} f, \dots, f(e_n) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow$ comme $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F, on a $\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset \mathrm{Im} f$
$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ □

Définition 1 (rang).
1. On appelle rang de la famille $(a_1, \dots, a_n)$ de vecteurs de E, est la dimension de $\mathrm{Vect}(a_1, \dots, a_n)$
2. Soit $f : E \to F$, on appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \mathrm{Im} f$

Proposition 2.
1. *f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre (i.e. $\mathrm{rg}(f) = n$)*
2. *f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F*
3. *f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F*

Démonstration. **partie 1**
f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$
Supposons $\ker f = \{0\}$
Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \dots + \alpha_n f(e_n) + 0$

$f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = 0$
$\Rightarrow \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in \ker f$ comme $\ker f = \{0\}$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \Rightarrow (f(e_1), f(e_n))$ libre.
Réciproquement : Si $\ker f \neq \{0\}$ *i.e.* Soit $i \neq 0, u \in \ker f$ alors $\exists\ \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$
ainsi $f(u) = f(\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n = \beta_1 f(e_1) + \cdots + \beta_n f(e_n) = 0$ car $u \in \ker f$
les β_i sont non tous nuls $\Rightarrow (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ liée

partie 2
f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = F$
donc $\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre F

partie 3
f est bijective $\Leftrightarrow$ f injective et surjective $\Leftrightarrow$ $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est libre et génératrice dans F
i.e. est une base de F

□

Question : Si $\dim F \neq \dim E$, existe-t-il f une application linéaire bijective de E dans F ?

Impossible : d'après la propriété 2 : Si f bujective linéaire de $E \to F \Rightarrow \dim E = \dim F$
$f : E \to F$ est surjective $\Rightarrow \dim F \leq \dim E$
$f : E \to F$ est injective $\Rightarrow \dim F \geq \dim E$
(analogue aux applications d'ensmbles finis)

Exemple 1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \alpha \in E$
$f(x, y, z) = (2x + y - z, y - z, \alpha z)$
Trouver selon α, $\mathrm{Im} f, \mathrm{rg}(f)$
(e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$$

$f(e_1) = (2,0,0)$, $f(e_2) = (1,1,0)$, $f(e_3) = (-1,-1,\alpha)$
$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left((2,0,0), (1,1,0), (-1,-1,\alpha)\right)$
$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}(2,0,0)$ et $(1,1,0)$ n'étant pas colinéaires $\dim \mathrm{Im} f \geq 2$

Pour quelles valeurs de α la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base de $\mathrm{Im} f$
or $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}^3, \dim \mathbb{R}^3 = 3$
$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ est surjective $\Rightarrow$ bijective $\Rightarrow \ker f = \{0\}$
Si $\alpha = 0$: En resolvant le système : $\beta_2 = \beta_3; \beta_1 = 0$
$\beta_2(f(e_2) + f(e_3)) = 0$ soit $f(\beta_2(e_2 + e_3)) = 0 \Rightarrow \beta_2(e_2 + e_3) \in \ker f$
Si $\alpha = 0$ $\mathrm{rg}(f) = 2$ et déterminons $\ker f$
$a \in \ker f \Leftrightarrow f(u) = 0$, soit $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ doit vérifier :
$x_1 f(x_1) + x_2 f(e_2) + x_3 f(e_2) = 0$
$\Leftrightarrow x_2 = x_3$ et $x_1 = 0$ *i.e.* $\ker f = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$

Remarque 1. $\alpha = 0$ $\dim \mathrm{Im} f = 2$ $\dim \ker = 1$ $2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$
$\alpha \neq 0$ $\dim \mathrm{Im} f = 3$ $\dim \ker = 0$ $3 + 0 = 3$

Théorème 1. *Soit E un K-espace vectoriel,* $\dim E = n$*, F un K-espace vectoriel*
Soit f un application linéaire de $E \to F$
On a toujours :

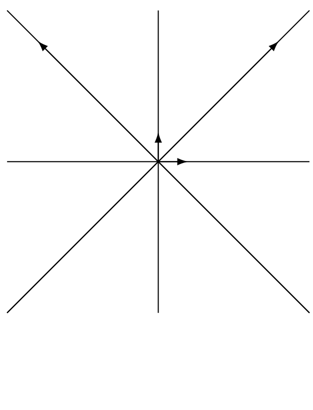
$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = n$$

Démonstration. $\dim E = n$
$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $E \Rightarrow$ est de dimension finie donc soit $(a_1, \ldots, a_p)$ une base de $\ker f$ avec $p \leq n$
Soit $e_{p+1}, \ldots, e_n$ des vecteurs d'une base de E tels que $(\underbrace{a_1, \ldots, a_p}_{\ker f}, \underbrace{a_{p+1}, \ldots, e_n}_{\text{supplémentaire du noyau}})$
soit une base de E. $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(a_1), \ldots, f(a_1), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$
$f(a_1) = 0, \ldots, f(a_p) = 0$
$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$
Montrons que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre
Soit $\beta_{p+1}, \ldots, \beta_n \in K$ tels que
$\beta_{P+1} f(e_{P+1}) + \cdots + \beta_n f(e_n) = 0$
$\Leftrightarrow f(\beta_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \beta_n e_n) = 0$
$\Rightarrow \beta_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \beta_n e_n \in \ker f \Rightarrow$ il s'écrit comme combinaison linéaire de la base $(a_1, \ldots, a_p)$
donc $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$ tel que
$\beta_{p+1} e_{p+1} + \cdots + \beta_n e_n = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p$
$\Leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_p a_p - \beta_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \beta_n e_n = 0$
or $(a_1, \ldots, a_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre donc
$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = \cdots = \beta_n = 0 \Rightarrow$ la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre
donc $\dim \mathrm{Im} f = n - p$, $\dim \ker f = p$
et $\dim E = n$ $\square$

Définition 2 (coordonnées d'un vecteur dans une base)**.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E
alors $\forall\ v \in E, \exists$ unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ tel que $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$
On appelle $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de v dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$

Remarque 2. Dans une autre base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, v aura des coordonnées différentes.

Exemple 2. $E = \mathbb{R}^3, e_1 = (1,0,1), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$
$v = (2,1,3)$ $v = 2e_1 + 1e_2 + 3e_3 \Rightarrow (2,1,3)$ sont les coordonnées de v dans (e_1, e_2, e_3)
$e'_1 = (2,0,0), e'_2 = (0,1,0), e'_3 = (0,0,3)$ est une base et $v = e'_1 + e'_2 + e'_3$: $(1,1,1)$ sont les coordonnées de v dans la base (e'_1, e'_2, e'_3)



Définition 3 (Matrices)**.** On appelle matrice de type (p,n) ou (p,n) ou (p,n)-matrice, tout tableau rectangulaire d'éléments de K.
On repère un élément de ce tableau par son numéro de ligne et son numéro de colonne $M = [a_{i,j}]$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,n} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des (p,n) matrices à éléments dans K est noté $\mathcal{M}_{p,n}(K)$.
On définit les opérations suivantes :
$+ : M = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad N = [b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad M + N = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$

Exemple 3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ MISSING

Autre loi : la multiplication par un scalaire :
Soit $\lambda \in K, M \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$
$M = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ alors $\lambda.M = [\lambda a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ Alors $(\mathcal{M}_{p,n}(K), +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel.

$$M = i \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{ij} & \\ & & a_{pn} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{pn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit $E_{k,l} = [e_{ij}]$ avec
$e_{ij} = 0$ si $(i,j) \neq (k,l)$
$e_{ij} = 1$ si $(i,j) = (k,l)$
ansi $\left(E_{(k,l)}\right)_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq l \leq n}}$ est génératrice dans $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ et aussi libre $\Rightarrow$ c'est une base
$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_{p,n}(K) = p.n$

MISSING

Proposition 3. *Soit* $f : E \to F$
$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E
$\mathcal{E}' = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* F

On définit la matrice de f *dans les bases* $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ *est* $M = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ *où* $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a2j \\ \vdots \\ apj \end{bmatrix}$ *sont les coordonnées de* $f(e_j)$ *dans* $\mathcal{E}'$

Alors si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ *sont les coordonnées de* v *dans* $\mathcal{E}$ *alors* $M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *sont les coordonnées* *de $f(v)$ dans $\mathcal{E}'$*

Exemple 4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f(x, y, z) = (2x + y - z, y - z, 2z)$
$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$
Calculer la matrice de f dans $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$
$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 0, 0) = 2e_1$
$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 1, 0) = e_1 + e_2$
$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, -1, 2) = -(e_1 + e_2) + 2e_3$
Les coordonnées de
$f(e_1)$ dans $\mathcal{E}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$f(e_2)$ dans $\mathcal{E}$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$f(e_3)$ dans $\mathcal{E}$ sont $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
donc la matrice M de f dans $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$
$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

TODO MAYBE

Proposition 4. *E, F, G trois K-espace vectoriel, de dimenstion finie :*
E a pour base $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$
F a pour base $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$
G a pour base $\mathcal{E}'' = (e''_1, \ldots, e''_n)$
$f : E \to F$ et $g : F \to G$ donc $g \circ f : E \to G$
M_f matrice de f, (p, n)-matrice, $M_g = (q, p)$-matrice
$f \circ f(u) = g(f(u))$ et la matrice de $g \circ f$ est :
$M_{g \circ f} = M_g.M_f$

Démonstration. Le produit $M_g.M_f$ est bien défini : c'est le produit d'une (q, p)-matrice avec (p, n)-matrice.
Soit X les coordonnées de u dans $\mathcal{E}$ et Y les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{E}'$.
alors $Y = M_f.X$
Soit Z les coordonnées de $g(f(u))$ dans $\mathcal{E}''$.
$\Rightarrow Z = M_g.Y \Rightarrow Z = M_g.M_f.X = M_{g \circ f}.X$ □

Chapitre 10

Matrices d'endomorphismes en dimension finie – Matrices de changement de Base

10.1 Matrices carrées

Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E donc sa matrice est une matrice carrée.
L'ensemble des matrices (n, n) sur K est noté $\mathcal{M}_n(K)$
– le produit est une loi interne dans $\mathcal{M}_n(K)$
– la produit n'est pas commutatif :
$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$M.N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N.M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = M$
donc $\mathcal{M}_n(K)$ n'est pas intègre (2 éléments non nuls donnent un produit nul)
et $\cdot$ n'est pas commutatif.

Il existe des matrices qui commutent :
Exemple : $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \quad A.B = B.A = \begin{bmatrix} \lambda_1\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\beta_3 \end{bmatrix}$$

Element neutre : $I \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que $\forall\ M \in \mathcal{M}_n(K) \quad M.I = I.M = M$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La diagonale de I est constituée de 1, les autres coefficients sont nuls.

Exemple 1. I est la matrice de l'application linéaire indentité : $E \to E$
i.e. $\mathrm{id}(e_1) = e_1, \mathrm{id}(e_2) = e_2, \dots, \mathrm{id}(e_n) = e_n$
$\Rightarrow \forall\ u \in E \quad \mathrm{id}(u) = u$

Exemple 2. $n \in \mathbb{N}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
Quelle application linéaire f ?
M^p ?
$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ base de E
E est la matrice de f avec $f(e_1) = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$
$\Rightarrow$ Soit $u \in E$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ des coordonnées de u dans $\mathcal{E}$
$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$
alors les coordonnées de $f(u)$ sont $Y = M.X$
$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
$f(u) = (\underbrace{x_1 + \cdots + x_n}_{\in K}).(\underbrace{e_1 + \cdots + e_n}_{\in E})$
$(e_1, \dots, e_n)$ est libre $\Rightarrow e_1 + e_2 + \cdots + e_n \neq 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 1$
$\Rightarrow \ker f = n = 1$
$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = n.M = M^2$
Par récurrence : $M^p = n^{p-1}.M$
$! \to$ $M \neq I$

Exemple 3. important : $E = \mathbb{R}^2, R_\theta =$ rotation de centre O et d'angle θ :
R_θ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Quelle est sa matrice de base (e_1, e_2) ?
$R_\theta(e_1) = \cos(\theta e_1) + \sin(\theta e_2)$
$R_\theta(e_2) = -\sin(\theta e_1) + \cos(\theta e_2)$
donc M_θ matrice de R_θ est $\begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdots \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \cdots \cos(\theta) \end{bmatrix} = M_\theta, M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Que vaut $M_\theta.M_{\theta'}$?
$M_\theta.M_{\theta'}$ est la matrice de l'application linéaire :
$R_\theta \circ R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} \Rightarrow M_\theta.M_{\theta'} = M_{\theta+\theta'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\theta') - \sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') - \cos(\theta+\theta') \end{bmatrix}$
Donc $M_\theta^n = M_{n\theta}$
M_θ possède-t-elle un inverse ?
i.e. $\exists N$ tel que $N.M_\theta = M_\theta.N = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

or $R_{-\theta} \circ R_\theta = \mathrm{id} = R_\theta \circ R_{-\theta}$
or $M_{-\theta}$ est la matrice

Chapitre 11

Matrices d'applications linéaires en dimension finie

Proposition 1. *Soit M une matrice (n, n), alors :*

1. *M est la matrice d'une application linéaire inversible si et seulement si M est inversible*

Démonstration. 1. La j-ième colonne de M représnte les coordonnées d'un vecteur $v_j, j = 1 \cdots n$ alors M est la matrice de f dans $\mathcal{E}$, où

$$f(e_j) = v_j \ \forall j = i \cdots n$$

2. Supposons M inversible :
   i.e. il existe N, (n, n)-matrice telle que $N.M = M.N = I$
   $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ I une (n, n)-matrice
   donc $\exists\ g : E \to E$, une application linéaire, donc N est la matrice dans $\mathcal{E}$ ainsi $M_{g \circ f} = N.M = I = M; N = M_{f \circ g}$
   donc $g \circ f(e_1) = e_1, g \circ f(e_2) = e_2, \ldots, g \circ f(e_n) = e_n$ de même $f \circ g(e_1) = e_1, \ldots, f \circ g(e_n) = e_n$
   $\Rightarrow \forall\ u \in E f \circ g(u) = g \circ f(u) = u \Rightarrow f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id} \Leftrightarrow f$ est inversible et g est l'inverse de f.
   Réciproquement : Si f est inversible alors il existe une application linéaire de $E \to E$ telle que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$
   donc $M_{f \circ g} = M_{g \circ f} = I$ et soit N la matrice de g alors
   $M_{f \circ g} = M.N$ et $M.N = N.M = I \Rightarrow M$ inversible
   $M_{g \circ f} = N.M$

□

Proposition 2. *Soit M une matrice (n, n), s'il existe une matrice (n, n), N telle que $N.M = I$ et N est l'inverse de M*

Démonstration. M est la matrice de f
n est la matrice de g

$$N.M = I \Rightarrow g \circ f = \mathrm{Id}$$

Alors $\ker f = \{0\}$
en effet : Soit $u \in \ker f \Rightarrow f(u) = 0 \Rightarrow g \circ f(u) = g(f(u)) = g(0) = 0$
or $g \circ f = \mathrm{Id} \Rightarrow g \circ f(u) = u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \ker f \subset \{0\}$
$\ker f$ est un sous-espace vectoriel de $E \Rightarrow \{0\} \subset \ker f \Rightarrow \ker f = \{0\}$
alors $\dim \ker f = 0$, or $\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = \dim E = n$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = n$ $\mathrm{Im} f \subset E$ et $\dim \mathrm{Im} f = \dim E \Rightarrow \mathrm{Im} f = E$
donc f est bijective donc inversible : $\exists f^{-1}$, application linéaire : $E \to E$, telle que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$
or $g \circ f = \mathrm{Id} = g \circ f \circ f^{-1} = f^{-1} \Rightarrow g \circ \mathrm{Id} = g = f^{-1}$
et donc N est-il inverse de M et $M.N = I$ □

11.1 changement de base

E un K-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E
Soit $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une famille libre de E, donc une base

Définition 1 (Matrice de passage)**.** La matrice P, dont les colonnes sont les coordonnées de chaque v_i dans la base $\mathcal{E}$
$\left(p = [P_{ij}]_{\substack{i=1\cdots n \\ j=1\cdots n}} \text{ où } v_i \text{ a pour coordonnées } \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{3i} \end{bmatrix} \text{ dans } \mathcal{E} \right)$ est la matrice d'une application linéaire
$\varphi(e_i) = v_i$ dans $\mathcal{E}$
alors φ est bijective, car $\mathrm{Vect}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = E \Rightarrow \varphi$ est surjective et φ est injective cat $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est libre
P est la *matrice de passage* de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{V}$

Proposition 3 (changement de coordonnées)**.** *Soit $u \in E$, soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{E}$ et soit $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{V}$
alors $X = P.Y$: coordonnées de $\mathcal{E}$ = Matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$, coordonnées dans $\mathcal{V}$*

Démonstration. $P = [P_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ alors $V_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} e_i$ par définition de P
Soit $u \in E, u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$
et $u = \sum_{i=1}^n y_i v_i$
$u = \sum_{j=1}^n y_j v_j = \sum_{j=1}^m y_j \left(\sum_{i=1}^n P_{ij} e_i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} y_i \right) e_i$
ainsi $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} y_i = x_i$
$\Leftrightarrow X = P.Y$: les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles □

Proposition 4. *Soit A la matrice d'une application linéaire f de $E \to E$ dans la base $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{V}$ une nouvelle base de E, et P la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$ alors la matrice de f dans la base $\mathcal{V}$ est : $B = P^{-1} : A.P$*

Démonstration. Soit $u \in E$,
X les coordonnées de u dans $\mathcal{E}$
X' les coordonnées de u dans $\mathcal{V}$
alors $X = PX'$
Soit Y les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{E}$
soit Y' les coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{V}$
alors $Y + PY'$. On a $Y = A.X \Rightarrow \underline{P.Y' = A.P.X'}$ or P est inversible car c'est la matrice d'une application linéaire bijective, donc $\boxed{Y' + P^{-1}APX'}$ □

Exemple 1. $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, calculer M^n
On se propose de trouver une base de $\mathbb{R}^3$ telle que dans cette base M soit diagonale

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_2 = (0,0,1), \mathcal{E} = (e_1, e_2, e_n)$$

M est la matrice d'une application linéaire φ dans la base $\mathcal{E}$
Soit $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ avec
$v_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$
$v_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_3)$
$v_3 = -\frac{1}{2}(e_2 + e_3)$

1. Montrer que $\mathcal{V}$ est une base
2. Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$
3. Ecrire M dans la base $\mathcal{V}$
4. Calculer M^n

Montrons que $\mathcal{V}$ est génératrice dans E

$$\text{Pour cela montrons que } \begin{array}{l} e_1 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) \\ e_2 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) \\ e_3 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{V}) \end{array}$$

$$\text{On a } \begin{array}{l} e_1 = v_1 + v_2 + v_3 \\ e_2 = v_1 - v_2 - v_3 \\ e_3 = -v_1 + v_2 - v_3 \end{array} \quad \Rightarrow \mathrm{Vect}(\mathcal{E}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$$

Or $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ cat $\mathcal{E}$ est une base $\Rightarrow E \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ et $\Rightarrow E = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$
ainsi $\mathcal{V}$ est une base
Soit $M_{\mathcal{V}}$ la matrice de f dans $\mathcal{V}$:

$f(v_1) = \frac{1}{2}(f(e_1) + f(e_2)) = \frac{1}{2}\left((3e_1 + 2e_2 + 3e_3) + (-e_1 - 3e_3)\right) = e_1 + e_2 = 2v_1$
$f(v_2) = \frac{1}{2}(f(e_1) + f(e_3)) = \frac{1}{2}\left((3e_1 + 2e_2 + 3e_3) + (e_1 - 2e_2 + e_3)\right) = 2(e_1 + e_3) = 4v_2$
$f(v_3) = -\frac{1}{2}(f(e_2) + f(e_3)) = -\frac{1}{2}\left(-e_1 - 3e_3 + e_1 - 2e_2 + e_3\right) = e_2 + e_3 = -2v_3$

Donc $M_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{\mathcal{V}}^2 = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^2 \end{bmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $M_{\mathcal{V}}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}$

La matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{V}$ est

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$X = P.X'$ où X sont les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathcal{E}$ et X' les coordonnées de u dans $\mathcal{V}$ alors : $M_{\mathcal{V}} = P^{-1}MP$
P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{E}$ donc

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{(\mathcal{V})}$$

$$M_{\mathcal{V}}^n = (P^{-1}MP)^n = \underbrace{P^{-1}MP.P^{-1}MP.P^{-1}MP \ldots P^{-1}MP}_{n \text{ fois}}$$

finir le calcul…

Chapitre 12

Systèmes linéaires

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n
Soit k vecteurs de E, $u_1, \ldots, u_k \in E$, et $b \in E$
On considère l'équation :

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_k u_k = b$$

Trouver $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^k$

Proposition 1. *Cette équation admet au moins une solution si et seulement si* $b \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$

Démonstration déja vue.

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $u_1 = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_1 \ldots u_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i$ et $b = \sum_{i=1}^n b_i e_i$
alors l'équation s s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

en identifiant dans l'équation, les coordonnées

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{array} \right\} \text{de la forme } A.X = b$$

c'est un *système linéaire*

Définition 1. Le système (S) est *compatible* si et seulement si (S) admet au moins une solution, *incompatible* sinon.

La proposition 1 se traduit par :
(S) compatible $\Leftrightarrow b \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$
(S) incompatible $\Leftrightarrow b \notin \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$

Définition 2. Une matrice A est dite *échelonnée* si et seulement si elle est écrite sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{3k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

i.e. $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq k}}$ et $\exists r \in \mathbb{N}^*, 1 \leq r \leq n$ tel que
$\forall i, 1 \leq i \leq r \ a_1 \neq 0, a_{ij} = 0$ si $j < i$
et $\forall i > r, a_{ij} = 0 \forall j = i \cdots k$

Exemple 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est facile de résoudre $A.X = b$, par exemple : pour quels vecteurs b le système $A.X = b$ est-il compatible ?
Et lorsqu'il est compatible, le résoudre.

$$A.X = b \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 0 & = & b_1 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & b_2 \\ & & & - & 2x_3 & & & + & x_5 & = & b_3 \\ & & & & & & & & 0 & = & b_4 \\ & & & & & & & & 0 & = & b_5 \end{array} \right\}$$

le système est compatible si et seulement si b est tel que $b_4 = b_5 = 0$
On résoud lorsque b a pour coordonnées $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\forall x_4, x_5 \in K$ il existe une solution à l'équation
x_4, x_5 sont les paramètres des solutions

Définition 3. r, le nombre de coefficients non nuls sur la diagonale d'une matrice échelonnée, est *le rang* de cette matrice, et les coefficients $a_{ii}, i \leq r$ sont les *pivots*.

Dans l'exemple : le rang de A est 3 : les pivots sont 1, 4 et -2.

Si A est échelonnée, on sait résoudre l'équation $A.X = b$, si le système est compatible

Définition 4. Deux systèmes linéaires (S) et (S') sont *équivalents* si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions.

Proposition 2. *Soit (S) un système linéaire, on obtient un système équivalents à (S), en appliquant les règles suivantes*

Règles :

1. On remplace une ligne L_i par $\lambda L_i, \lambda \in K, \lambda \neq 0$
2. permuter 2 lignes
3. changer une ligne L_i par $L_i +$ une combinaison linéaire des autres lignes

Proposition 3. *Tout système est équivalent à un système échelonné*

Démonstration. Se fait en appliquant R1, R2 et R3. □

Exemple 2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b_1 & L_1 \\ - x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & b_2 & L_2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & b_3 & L_3 \end{array}\right\}$$

$$S \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b_1 & L'_1 = L_1 \\ & & 4x_2 & & & - & 2x_4 & = & b_1 + b_2 & L'_2 = L_2 + L_1 \\ & - & x_2 & - & x_3 & & & = & b_2 - 2b_1 & L'_3 = L_3 - 3L_1 \end{array}\right\}$$

$$S \leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b_1 & L''_1 = L_1 \\ & & 4x_2 & & & - & 2x_4 & = & b_1 + b_2 & L''_2 = L'_1 \\ & & & - & 12x_3 & - & 2x_4 & = & 4b_3 - 7b_1 + b_2 & L''_3 = 4L'_3 + L'_2 \end{array}\right\}$$

Proposition 4. *Soit S le système $A.X = b$, soit f l'application linéaire de $E \to E$, dont A est la matrice dans $\mathcal{E}$, alors si le système possède une solution $X_0 \in K$, et soit u_0 le vecteur de E, de coordonnées X_0 dans $\mathcal{E}$,*
alors l'ensemble des solutions est $u_0 + \ker f$: c'est un sous-espace affine

Démonstration. Résoudre le système revient à chercher $u \in E$ tel que $f(u) = v$ où v possède b comme coordonnées.
Si u_0 est tel que $f(u_0) = v \Rightarrow \forall w \in \ker f\ f(w + u_0) = f(u_0) = v$
$\Rightarrow w + u_0 \in$ solutions $\Rightarrow^* \ker f + u_0 \subset$ solutions
car $\forall u \in \ker f + u_0, \exists w \in \ker f$ tel que $u = w + u_0$
Réciproquement :
Si $i \in$ solutions $\Rightarrow f(u) = v$ donc $f(u - u_0 + u_0) = v$
soit $f(u - u_0) + f(u_0) = v$ or $f(u_0) = v$
$\Rightarrow f(u - u_0) = 0 \Rightarrow u - u_0 \in \ker f \Rightarrow u \in u_0 + \ker f$ □

Définition 5. On dit que (S) est de Gramer si et seulement si le système possède une unique solution *i.e.*$\ker f = \{0\}$ (matrice carrée)

Application :
Equations cartésiennes d'une sous-espace vectoriel de E, engendré par une famille $(u_1, \ldots, u_p)$, $\dim E = n$

Exemple 3. $n = 4, p = 3, \mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4), u_1 = e_1 + 2e_2 - e_3, u_2 = e_1 - e_4, u_3 = e_2$
Equations cartésiennes de $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ sont les CNS sur les coordonnées (y_1, y_2, y_3, y_4) de $u \in E$ tel que $u \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$
Soit $u \in E$, $u \in \text{Vect}(u_1, u_2, u_3) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in K$ tels que $u = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ en les

coordonnées dans $\mathcal{E}$:

$$u_1 : \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}, u_2 : \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, u_3 : \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & x_1 & + & x_2 & & & = & y_1 \\ & 2x_1 & & & + & x_3 & = & y_2 \\ - & x_1 & & & & & = & y_3 \\ & & - & x_2 & & & = & y_4 \end{array}\right\}$$

Trouver des relations portant sur$(y_1, y_2, y_3, y_4) \in K^4$ pour que ce système soit compatible

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrclcll} - & x_1 & & & & = & y_3 & L'_1 = L_3 \\ & & - & x_2 & & = & y_4 & L'_2 = L_3 \\ & & & x_2 & & = & y_1 + y_3 & L'_3 = L_1 + L_3 \\ & & & & x_3 & = & y_2 + 2y_3 & L'_4 = L_2 + 2L_3 \end{array}\right\}$$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrclcll} - & x_1 & & & & = & y_3 & L''_1 = L'_1 \\ & & - & x_2 & & = & y_4 & L''_2 = L'_2 \\ & & & & x_3 & = & y_2 + 2y_3 & L''_3 = L'_4 \\ & & & & 0 & = & y_1 + y_3 + y_4 & L''_4 = L'_3 + L'_2 \end{array}\right\}$$

système échelonné : le système est compatible si et seulement si $y_1 + y_3 + y_4 = 0$ est l'équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ $\dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = 3 =$ rang du système $=$ le nombre de pivots

En effet on cherche $x_1, x_2, x_3 \in K$ tels que $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$ $i.e.$tel que $\left\{\begin{array}{rcl} -x_1 & = & 0 \\ -x_2 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \end{array}\right\}$

Exemple 4. $\dim E = 4, \mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ base $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$\left\{\begin{array}{lcrrcrcrcr} u_1 & = & & e_1 & - & e_2 & + & 2e_3 & - & 3e_4 \\ u_2 & = & & 2e_1 & + & e_2 & - & e_2 & + & e_4 \\ u_3 & = & - & e_1 & - & e_2 & + & e_3 & - & e_4 \\ u_4 & = & & 2e_1 & - & e_2 & + & 2e_3 & - & 2e_4 \end{array}\right\}$$

Soit $V = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$. Trouver une base de V, et exprimer u_1,u_2,u_3 et u_4 dans cett e base les coordonnées de u_1 sont $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$, de u_2 : $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, de u_3 : $\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$, de u_4 : $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2 & -2\end{bmatrix}$

En exercice, on peut chercher $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4$ tel que $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 = 0$

Solution : $x_3 = -x_1$, $x_2 = -x_4$, $x_1 = -x_4$

Exemple 5. *E un K-espace vectoriel, $\dim E = 4$ $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ base*
F un sous-espace vectoriel de E dont les équations cartésiennes sont

$$(S) \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

u tel que $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4, u \in F \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vérifie S

Trouver une base de F

Pour cela il suffit de résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + -x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{array}\right.$$

u, ayant pour coordonnées dans $\mathcal{E}$, (x_1, x_2, x_3, x_4), $u \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$
i.e. $u = -x_3 e_1 + (x_3 + x_4) e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$
$= x_3(-e_1 + e_2 + e_3) + x_4(e_2 + e_4) \Leftrightarrow u \in \mathrm{Vect}(-e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_4)$
Montrons que $(-e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_4)$ est libre.
i.e. $\lambda_1(-e_1 + e_2 + e_3) + \lambda_2(e_2 + e_4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow (-e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_4) \text{ est une base de } F$$

Trouver G tel que $F \oplus G = E$
Cherchons à compléter F par des vecteurs u_1, u_2 de $\mathcal{E}$, tel que $(-e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_4, u_1 + u_2)$ soit libre, $\mathcal{V}$ sera ainsi une base de F et $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \oplus F = E$
On échelonne le système provenant de :

$$x_1 \underbrace{(-e_1 + e_2 + e_3)}_{v_1} + x_2 \underbrace{(e_2 + e_4)}_{v_2} + x_3 e_1 + x_4 e_2 + x_5 e_3 + x_6 e_4 = 0$$

Soit :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & v_1 & & v_2 & & e_1 & & e_2 & & e_3 & & e_4 & & \\ - & x_1 & & & + & x_3 & & & & & & & = & 0 \\ & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 0 \\ & x_1 & & & & & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ & & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 0 \end{array} \quad \text{soit} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Le système échelonné possède 4 pivots $\Rightarrow$ les 4 premiers vecteurs v_1, v_2, e_1, e_2 sont *libres.*
$\Rightarrow (v_1, v_2, e_1, e_2)$ est une base de E
$\Rightarrow F \oplus \mathrm{Vect}(e_1, e_2) = E$

Exemple 6. $\dim E = 4$ $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$
$f : E \to E$ linéaire

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 + 2e_3 \\ f(e_2) = 2e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \\ f(e_3) = -e_1 - e_2 - e_4 \\ f(e_4) = 2e_2 - 2e_3 + e_4 \end{cases} \qquad \text{Matrice de } f \text{ dans } \mathcal{E} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi $f(u) = v \Leftrightarrow MX = Y$
avec X les coordonnées de u dans $\mathcal{E}$ et Y les coordonnées de v dans $\mathcal{E}$

Trouver la base de $\mathrm{Im} f$, $\ker f$ et les équations cartésiennes de $\mathrm{Im} f$, $\ker f$

$v \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists E$ tel que $v = f(u)$
i.e. Y sont les coordonnées d'un vecteur de $\mathrm{Im} f \Leftrightarrow \exists X \in K^4$ tel que $Y = MX$

soit (y_1, y_2, y_3, y_4) sont les coordonnées d'un vecteur de $\mathrm{Im} f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr} & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & y_1 \\ - & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & 2x_4 & = & y_2 \\ & 1x_1 & - & x_2 & & & - & 2x_4 & = & y_3 \\ & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & y_4 \end{array} \right.$

Echelonner le système :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & \\ -1 & 1 & 6 & & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\ker f = \{u, f(u) = 0\}$
Résoudre le système $MX = 0$
i.e. en utilisant le système échelonné on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 - X_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{équations cartésiennes de } \ker f$$

Question : $f : E \to E, \dim E = n$, a-t-on toujours
$\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0\}$
ou $\mathrm{Im} f + \ker f = E$?
On a toujours $\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = n$ mais la réponse est NON.

A, B, C matrices
$A.B = A.C \Rightarrow B = C$?
FAUX