Raphaël Champeimont 24 janvier 2010
Réseaux TD – Séries de Fourier

1 Calcul de $R_{m,n}$

Soit $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
R_{m,n} &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi m f_0 t)\sin(2\pi n f_0 t) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t(m+n)) dt - \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t(m-n)) dt
\end{aligned}$$

Regardons le premier terme. Supposons $m + n \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t(m+n)) dt &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m+n)} \left[\cos(2\pi f_0 t(m+n))\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m+n)} (\cos(\pi(m+n)) - \cos(-\pi(m+n))) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m+n)} ((-1)^{m+n} - (-1)^{-(m+n)}) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m+n)} ((-1)^{m+n} - (-1)^{(m+n)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si maintenant on a $m + n = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t(m+n)) dt &= \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin 0 dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} 0 dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le premier terme est donc toujours nul. Regardons maintenant le deuxième terme. Supposons $m - n \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t(m-n)) dt &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m-n)} \left[\cos(2\pi f_0 t(m-n))\right]_{-T/2}^{T/2} \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m-n)} (\cos(\pi(m+n)) - \cos(-\pi(m-n))) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m-n)} ((-1)^{m-n} - (-1)^{-(m-n)}) \\
&= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi f_0(m-n)} ((-1)^{m-n} - (-1)^{(m-n)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si maintenant on a $m+n=0$. On a

$$\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t(m-n))dt \quad = \quad 0$$

Les deux termes sont donc toujours nuls. Donc on a

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, R_{m,n} = 0$$

2 Exercice 3 – cas $f_0 = 1000$ Hz

Les fréquences 1000 et 3000 Hz passent. Elles correspondent respectivement à b_1 et b_3. (On rappelle que les a_i sont nuls sauf a_0, et les b_i pour i pair sont nuls aussi). Le signal est donc (en volts en fonction du temps) :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + b_1 \sin(2\pi f_0 t) + b_3 \sin(6\pi f_0 t) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(2\pi f_0 t) + \frac{2}{3\pi}\sin(6\pi f_0 t) \end{aligned}$$